数学の要点 3

目次

要点 7 変化の割合

変化の割合とは，x の値が 1 ずつ増加したときの y の増加量のことで，関数 $y=ax^2$ の変化の割合は一定ではない。

変化の割合 ＝ $\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$

⇨

変化の割合の公式

関数 $y=ax^2$ で，x の値が●から▲まで増加するとき，

変化の割合 ＝ a（●＋▲）

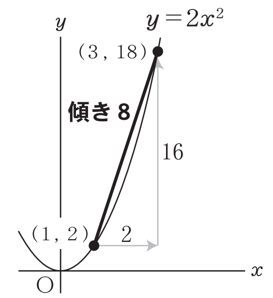
① 関数 $y=\boxed{2}\,x^2$ について，x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。

・1 から 3 まで

➡ 変化の割合＝ $\boxed{2}\times(1+3)=\underline{8}$

・-4 から 2 まで

➡ 変化の割合＝ $\boxed{2}\times(-4+2)=\underline{-4}$



参考

変化の割合は直線の傾き

変化の割合は，2 点（1，2），（3，18）を通る**直線の傾き**を表している。

② 関数 $y=\boxed{a}\,x^2$ について，x の値が 1 から 4 まで増加するときの変化の割合が 15 であるとき，a の値を求めなさい。

変化の割合＝ $\boxed{a}\times(1+4)=5a$ ➡ $5a=15$

$\underline{a=3}$

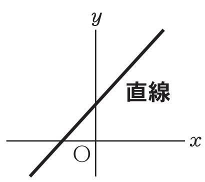
得 公式にあてはめて変化の割合を表し，方程式を解く。

要点 8 1 次関数 $y=ax+b$ と関数 $y=ax^2$

1 次関数 $y=ax+b$

変化の割合はいつも一定で，

a に等しい。

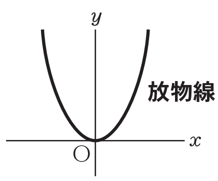


関数 $y=ax^2$

x の値が●から▲まで

増加するとき，

変化の割合＝ a（●＋▲）



■ 関数 $y=ax^2$ と $y=2x-1$ について，x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合が等しいとき，a の値を求めなさい。

・関数 $y=ax^2$ の変化の割合は，$a\times(1+3)=4a$

・1 次関数 $y=2x-1$ の変化の割合は，いつも一定で 2

➡ $4a=2$

$\underline{a=\dfrac{1}{2}}$

確認問題　左のページと同じように解いてみよう。

1 次の問いに答えなさい。

（１） 関数 $y=2x^2$ について，x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。

① １から４まで　　② －３から２まで

（２） 関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ について，x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。

① ２から４まで　　② －３から－１まで

（３） 関数 $y=-x^2$ について，x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。

① ２から５まで　　② －１から３まで

2 次の問いに答えなさい。

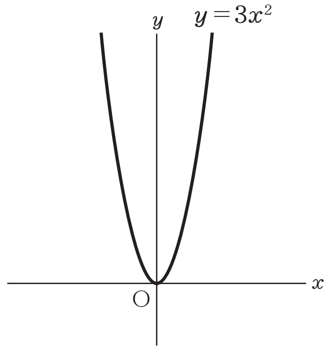
（１） 関数 $y=ax^2$ について，x の値が１から３まで増加するときの変化の割合が４であるとき，a の値を求めなさい。

（２） 関数 $y=ax^2$ について，x の値が２から４まで増加するときの変化の割合が－３であるとき，a の値を求めなさい。

3 関数 $y=ax^2$ と $y=4x+5$ について，x の値が－１から３まで増加するときの変化の割合が等しいとき，a の値を求めなさい。

練習問題　たくさん解いて，自信をつけよう。

1 関数 $y=3x^2$ について，次の □ にあてはまることばや記号を書きなさい。 要点5

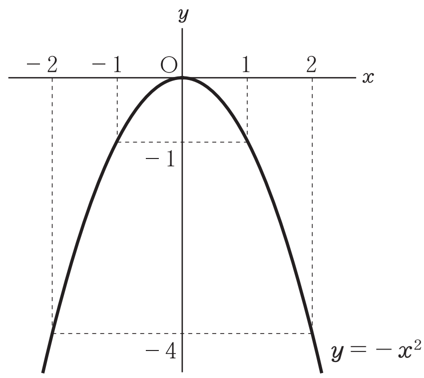


□ （１） $x \leqq 0$ の範囲では，x の値が増加するにつれて，y の値は ㋐ □ し，$x \geqq 0$ の範囲では，x の値が増加するにつれて，y の値は ㋑ □ する。

□ （２） $x=0$ のとき，y の値は □ となる。

□ （３） x がどんな値をとっても，つねに y □ 0 である。

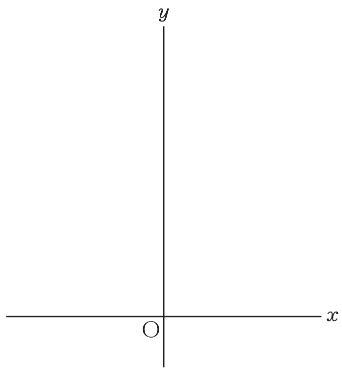
2 右の図は, 関数 $y=-x^2$ のグラフである。これを利用して，x の変域が次のようなとき，y の変域を求めなさい。 要点6



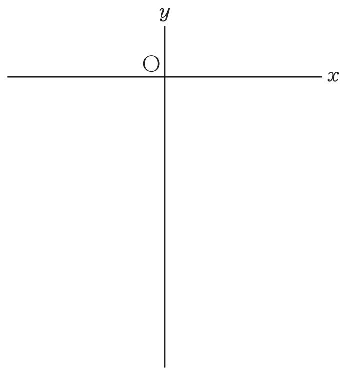
□ （１） $1 \leqq x \leqq 2$　　□ （２） $-2 \leqq x \leqq 1$

3 x の変域に注意して，次の関数の簡単なグラフをかき，y の変域を求めなさい。 要点6

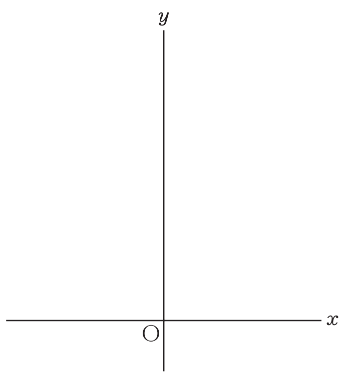
□ （１） $y=x^2\ (-3 \leqq x \leqq 1)$



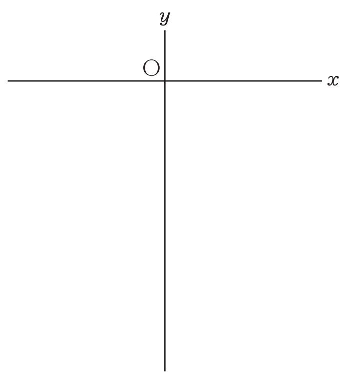
□ （２） $y=-2x^2\ (-1 \leqq x \leqq 2)$



□ （３） $y=\dfrac{1}{3}x^2\ (-3 \leqq x \leqq 6)$



□ （４） $y=-x^2\ (1 \leqq x \leqq 4)$



＊わからない問題は 要点○ にもどって見直そう。また，まちがえた問題にはチェック ☑ を付けよう。

4 次の問いに答えなさい。 要点7

□ （１） 関数 $y=x^2$ について，x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。

① 1から3まで　　② −4から2まで

□ （２） 関数 $y=3x^2$ について，x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。

① −1から5まで　　② −4から−2まで

□ （３） 関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ について，x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。

① 1から7まで　　② −6から2まで

□ （４） 関数 $y=-2x^2$ について，x の値が次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。

① −2から3まで　　② −4から1まで

5 次の問いに答えなさい。 要点7

□ （１） 関数 $y=ax^2$ について，x の値が−1から3まで増加するときの変化の割合が6であるとき，a の値を求めなさい。

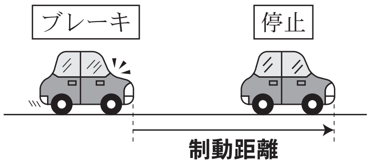
□ （２） 関数 $y=ax^2$ について，x の値が2から6まで増加するときの変化の割合が−2であるとき，a の値を求めなさい。

6 □ 関数 $y=ax^2$ と $y=-2x+1$ について，x の値が−1から3まで増加するときの変化の割合が等しいとき，a の値を求めなさい。 要点8

発展学習 関数 $y=ax^2$ の利用

要点 9 身のまわりの関数 $y=ax^2$

自動車にブレーキをかけるとき，ブレーキがきき始めてから停止するまでの距離を**制動距離**（せいどう）といい，その距離は自動車の速さの２乗に比例する。



■ ある自動車は，時速 20 km で走っているときの制動距離が 4 m になった。時速 $x\,km$ で走っているときの制動距離を $y\,m$ とするとき，次の問いに答えなさい。

① y を x の式で表しなさい。

$y=ax^2$ に $x=20$，$y=\boxed{4}$ を代入して，$\boxed{4}=a\times 20^2$

$400a=4$

$a=\dfrac{1}{100}$

➡ $y=\dfrac{1}{100}x^2$

② 時速 40 km で走っているときの制動距離を求めなさい。

$y=\dfrac{1}{100}x^2$ に $x=40$ を代入して，

$y=\dfrac{1}{100}\times 40^2=\dfrac{1}{100}\times 1600$

$=16$

➡ 答え 16 m

③ 制動距離が 9 m になるのは，時速何 km で走っているときか求めなさい。

$y=\dfrac{1}{100}x^2$ に $y=9$ を代入して，

$9=\dfrac{1}{100}x^2$

$x^2=900$

$x=\pm 30$ ➡ 答え 時速 30 km

注意！ 答えは正の値！

得 「y は x の２乗に比例する」とき，まず $y=ax^2$ と表そう。次に，問題文から x，y の値を見つけ，式に代入すれば**比例定数 a** が求まる。

■ 物体を空中で落とすとき，落とし始めてからの時間を x 秒，落ちた距離を $y\,m$ とすると，$y=\boxed{5}\,x^2$ の関係があった。このとき，2 秒後から 4 秒後までの平均の速さを求めなさい。

得 関数 $y=ax^2$ で，x の値が●から▲まで増加するとき，**変化の割合＝a（●＋▲）**

要点 10 平均の速さ

平均の速さ＝$\dfrac{\text{進んだ道のり}}{\text{かかった時間}}$＝**変化の割合**

➡ $\boxed{5}\times(2+4)=30$

➡ 答え 秒速 30 m

確認問題　左のページと同じように解いてみよう。

1 走っている自動車にブレーキをかけるとき，ブレーキがきき始めてから停止するまでの制動距離は，速さの 2 乗に比例する。ある自動車は，時速 40 km で走っているときの制動距離が 20 m になった。時速 x km で走っているときの制動距離を y m とするとき，次の問いに答えなさい。

（１）y を x の式で表しなさい。

（２）この自動車が時速 60 km で走っているときの制動距離を求めなさい。

（３）この自動車の制動距離が 5 m になるのは，時速何 km で走っているときか求めなさい。

2 ボールがある斜面を転がるとき，転がり始めてからの時間を x 秒，転がった距離を y m とすると，$y = 3x^2$ の関係があった。このとき，次の問いに答えなさい。

（１）転がり始めてから 2 秒後までに，ボールは何 m 転がるか求めなさい。

（２）ボールが 27m 転がるのは，転がり始めてから何秒後か求めなさい。

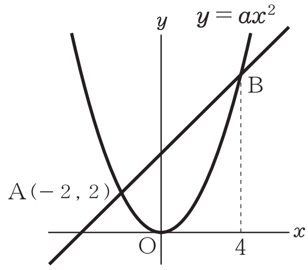
（３）転がり始めて，2 秒後から 5 秒後までの平均の速さを求めなさい。

発展学習　放物線と直線

要点 11　放物線と直線

グラフの問題は，わかっている値を**代入**して解くのがポイント！

■ 右の図のように，関数 $y=ax^2$ のグラフ上に，2 点A $(-2,\ 2)$，B があり，点Bの x 座標は 4 である。このとき，次の問いに答えなさい。



① a の値を求めなさい。

$y=ax^2$ に $x=-2$，$y=2$ を代入して，

$2=a\times(-2)^2$

$4a=2$

$a=\dfrac{1}{2}$

② 点Bの座標を求めなさい。

$y=\dfrac{1}{2}x^2$ に $x=4$ を代入して，

$y=\dfrac{1}{2}\times 4^2=8$

➡ $B(4,\ 8)$

③ 2 点A，Bを通る直線の式を求めなさい。

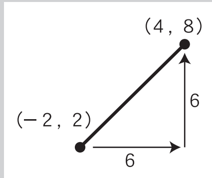
・$A(-2,\ 2)$，$B(4,\ 8)$ を通る直線の傾きは，$\dfrac{8-2}{4-(-2)}=\dfrac{6}{6}=1$

・求める直線の式を $y=x+b$ とし，$x=-2$，$y=2$ を代入して，

$2=-2+b$

$b=4$ ➡ $y=x+4$

得　直線の傾き

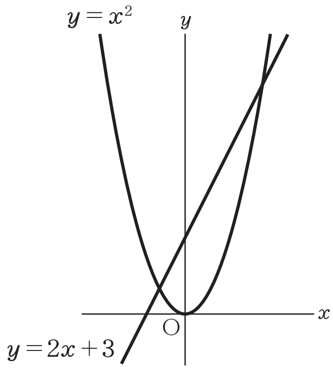


⬇

傾き $=\dfrac{6}{6}=1$

得　直線の式は $y=ax+b$
（a は**傾き**，b は**切片**）

■ 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2x+3$ の交点の座標を求めなさい。



要点 12　放物線と直線の交点

連立方程式 $\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x+3 \end{cases}$ ➡ y を消去して $x^2=2x+3$ を解く。

・$x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$

$x=-1,\ 3$

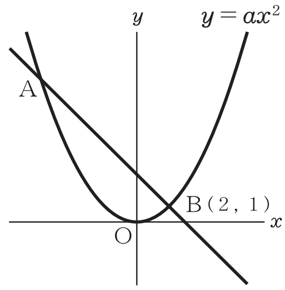
・$y=x^2$ に $x=-1$ を代入して，$y=(-1)^2=1$

・$y=x^2$ に $x=3$ を代入して，$y=3^2=9$

➡ $(-1,\ 1)$，$(3,\ 9)$

確認問題　左のページと同じように解いてみよう。

1 右の図のように，関数 $y=ax^2$ のグラフ上に，2点A，B(2，1)があり，点Aの x 座標は-6である。このとき，次の問いに答えなさい。

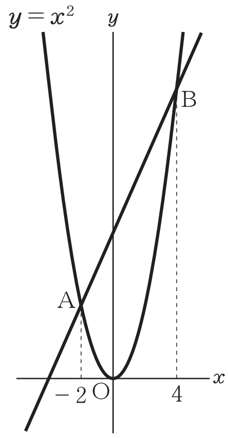


（１） a の値を求めなさい。

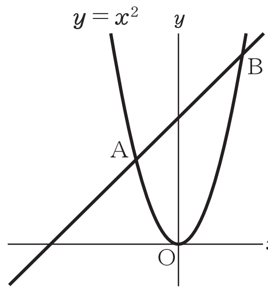
（２） 点Aの座標を求めなさい。

（３） 2点A，Bを通る直線の式を求めなさい。

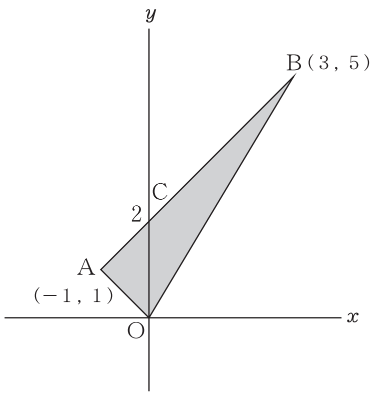
2 右の図のように，関数 $y=x^2$ のグラフ上に，2点A，Bがある。A，Bの x 座標がそれぞれ-2，4であるとき，2点A，Bを通る直線の式を求めなさい。



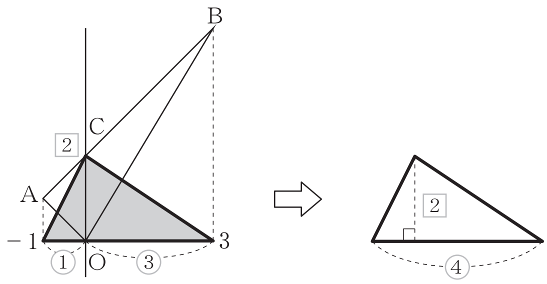
3 右の図のように，関数 $y=x^2$ と $y=x+6$ が2点A，Bで交わっている。x 座標が負であるものをA，正であるものをBとして，2点A，Bの座標を求めなさい。



■ 次の図で△ＯＡＢの面積を求めなさい。



要点13 グラフ上の三角形の面積の求め方



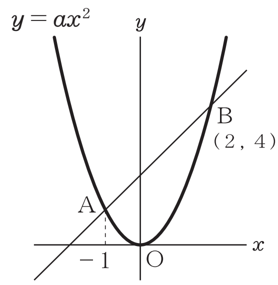
△ＯＡＢ＝（Ａ,Ｂの x 座標の絶対値の和）× ＯＣ × $\frac{1}{2}$

参考

点Ｃは直線ＡＢの切片のこと。2点Ａ，Ｂの x 座標と，直線ＡＢの切片がわかれば，△ＯＡＢの面積を求めることができる。

・△ＯＡＢ＝$\underbrace{4}_{底辺} \times \underbrace{2}_{高さ} \times \frac{1}{2} = \underline{4}$

■ 右の図のように，関数 $y=ax^2$ のグラフ上に，2点Ａ，Ｂ(2，$\boxed{4}$)があり，点Ａの x 座標は −1 である。このとき，次の問いに答えなさい。



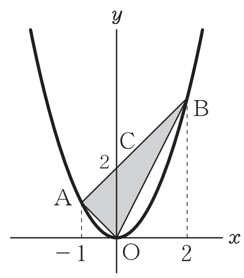
① a の値を求めなさい。

$y=ax^2$ に $x=2$，$y=\boxed{4}$ を代入して，$\boxed{4}=a\times 2^2$

$4a=4$

$\underline{a=1}$

② 2点Ａ，Ｂを通る直線の式を求めなさい。



・点Ａの y 座標は，$y=x^2$ に $x=-1$ を代入して，$y=(-1)^2=1$

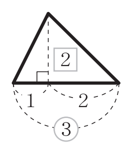
・Ａ(−1，1)，Ｂ(2，4)を通る直線の傾きは，$\frac{4-1}{2-(-1)}=\frac{3}{3}=1$

・求める直線の式を $y=x+b$ とし，$x=2$，$y=4$ を代入して，

$4=2+b$

$b=2$ ➡ $\underline{y=x+2}$

③ △ＯＡＢの面積を求めなさい。

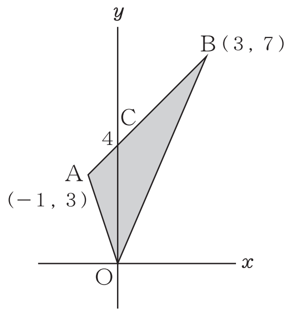


右の図より，△ＯＡＢ＝$\underbrace{3}_{底辺} \times \underbrace{\boxed{2}}_{高さ} \times \frac{1}{2} = \underline{3}$

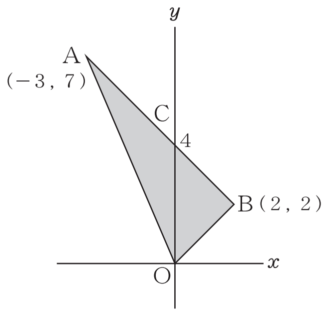
確認問題　左のページと同じように解いてみよう。

1 次の図で，△OABの面積を求めなさい。

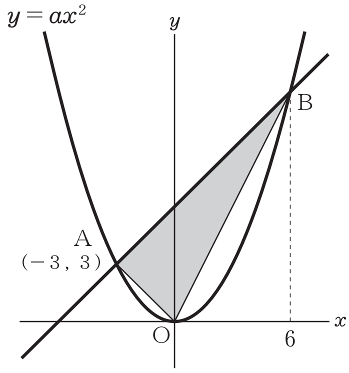
（１）



（２）



2 右の図のように，関数 $y = ax^2$ のグラフ上に，２点A（−３，３），Bがあり，点Bの x 座標は６である。このとき，次の問いに答えなさい。



（１）a の値を求めなさい。

（２）２点A，Bを通る直線の式を求めなさい。

（３）△ＯＡＢの面積を求めなさい。

3 右の図のように，関数 $y = x^2$ と $y = -x + 6$ が２点A，Bで交わっている。このとき，△OABの面積を求めなさい。