5．図形と証明

ステップ1 仮定（かてい）と結論（けつろん）

あることがらが，「　　ならば，　　である。」という形で表されるとき，　　の部分を**仮定**，　　の部分を**結論**という。

ポイント
「（仮定）ならば，（結論）である。」

参考　「　　ならば，～」は「　　のとき，～」と書くこともある。

基本パターン1

▼ 次のことがらの仮定と結論を書きなさい。

1）△ABC ≡ △DEF ならば，∠A = ∠D である。

仮定 ㋐　　　，結論 ㋑

2）三角形の内角の和は 180° である。

（「　　ならば，　　である。」の形に書きかえよう）

➡ 三角形 ならば，内角の和は 180° である。

仮定 ㋒　　　，結論 ㋓

トライ1　次のことがらの仮定と結論を書きなさい。

① △ABC ≡ △DEF ならば，AB = DE である。

② 6の倍数は偶数である。

ステップ2 定理（ていり）と証明（しょうめい）

❶ あることがらが成り立つわけを，それまでに学んだ性質を根拠にして示すことを**証明**という。

（すでに成り立つことがわかっていることがら）

❷ それまでに学んだ性質で証明されたことがらのうち，証明の根拠によく使われる重要なものを**定理**という。

ポイント　**定理と証明**

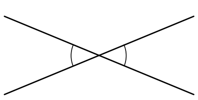
【仮定】―― 証明 ――→【結論】

与えられたヒント（仮定）をもとにして，理由（根拠）をはっきりと書き，知りたいことがら（結論）を導くこと

基本学習 ―― 証明の根拠によく使われる定理

対頂角の性質

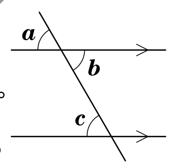
ⓐ 対頂角は等しい。



平行線の性質

ⓑ 2直線が平行ならば，同位角や ㋐　　 は等しい。

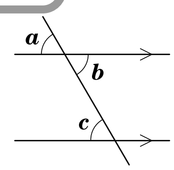
（∠a = ∠c）（∠b = ∠c）



平行線になるための条件

ⓒ ㋑　　 か錯角が等しければ，2直線は平行である。

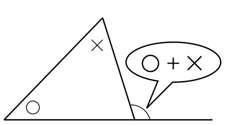
（∠a = ∠c）（∠b = ∠c）



三角形の内角・外角の性質

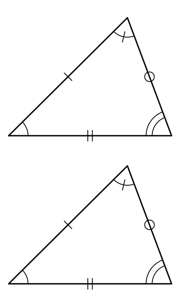
ⓓ 三角形の内角の和は ㋒　　 °である。

ⓔ 三角形の1つの外角は，それととなり合わない2つの内角の和に等しい。



合同な図形の性質

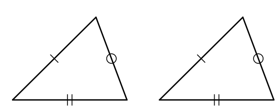
ⓕ 合同な図形の対応する辺の長さや角の大きさは等しい。



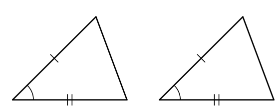
三角形の合同条件

2つの三角形は，次の条件のいずれかが成り立てば合同である。

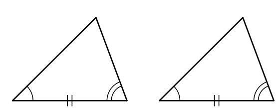
ⓖ ㋓　　 がそれぞれ等しい。



ⓗ 2辺と ㋔　　 がそれぞれ等しい。



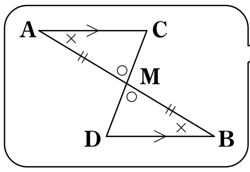
ⓘ 1辺と ㋕　　 がそれぞれ等しい。



答え　基本1 ㋐ △ABC ≡ △DEF　㋑ ∠A = ∠D　㋒ 三角形　㋓ 内角の和は180°
基本学習 ㋐ 錯角　㋑ 同位角　㋒ 180　㋓ 3辺　㋔ その間の角　㋕ その両端の角

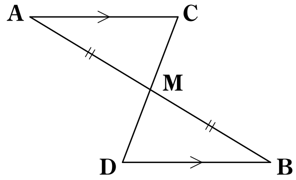
トライ② 右下の図で，AC∥DB，点 M は AB の中点 ならば，MC＝MD であることを次のように証明した。
証明の根拠となることがらを，前ページの基本学習 ⓐ～ⓘ より選び，〔　〕に記号を書きなさい。

なぜ等しいのか？なぜ合同になるのか？
その理由のこと



【証明】　△MAC と△MBD において

MA＝MB ………… 仮定
∠AMC＝∠BMD ………… ㋐〔　　〕
∠MAC＝∠MBD ………… ㋑〔　　〕
したがって，△MAC ≡ △MBD ………… ㋒〔　　〕
これより，MC＝MD ………… ㋓〔　　〕

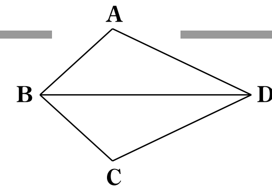


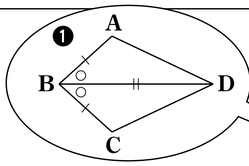
ステップ③ 三角形の合同の証明

線分の長さや角の大きさが等しいことを証明するときには，三角形の合同を根拠として使う場合が多い。

基本パターン②

▼ 右の図で，AB＝CB，BD は∠ABC の二等分線 のとき，△ABD ≡ △CBD であることを証明しなさい。





【証明】 ❷ △ABD と△CBD において，

❸
仮定 より，　AB＝㋐〔　　〕 …①
∠ABD＝∠㋑〔　　〕 …②
共通 な辺だから，BD＝BD …③

①，②，③より，㋒〔　　　　〕がそれぞれ等しいから，❹

△ABD ≡ △㋓〔　　〕 ❺

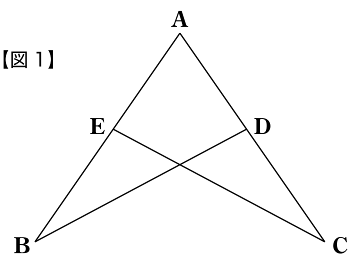
ポイント　三角形の合同の証明の進め方
❶ 等しい辺や角には，図の中に同じ印をつける。
❷ 証明したい２つの三角形を示す。
❸ 等しい辺や角を式で表し，その理由（根拠）を書く。
❹ 三角形の合同条件を書く。
❺ 結論を書く。

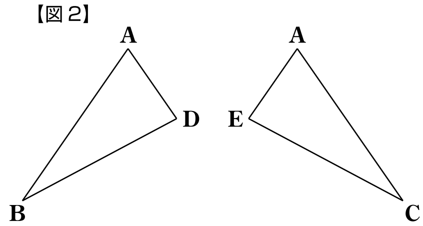
トライ③ 右の図１で，AB＝AC，∠ABD＝∠ACE ならば，BD＝CE である。
これについて，次の問いに答えなさい。

① 仮定と結論を書きなさい。

② 右の図２の中に，等しい辺や角を見つけ，同じ印をつけなさい。

③ このことを証明しなさい。

【図１】


【図２】


【証明】　△ABD と△㋐〔　　〕において

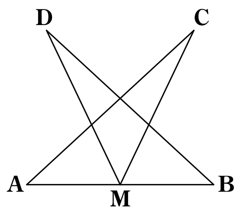
仮定より，　AB＝㋑〔　　〕 …①
∠ABD＝∠㋒〔　　〕 …②
共通な角だから，∠BAD＝∠㋓〔　　〕 …③

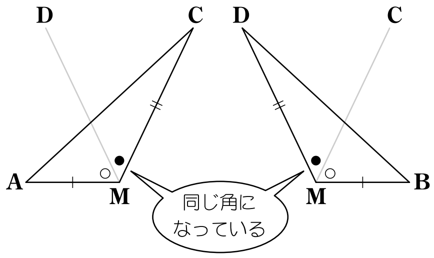
①，②，③より，㋔〔　　　　〕がそれぞれ等しいから，△ABD ≡△㋕〔　　〕

したがって，合同な図形の対応する㋖〔　　〕の長さは等しいから，BD＝㋗〔　　〕

答え　基本２　㋐ CB　㋑ CBD　㋒ ２辺とその間の角　㋓ CBD

発展パターン 1





▼ 左の図で，点 M は線分 AB の中点で，∠AMD＝∠BMC，MC＝MD である。このとき，△AMC ≡ △BMD であることを証明しなさい。

【証明】 △AMC と △BMD において，

仮定より， AM＝㋐［　　］ …①， MC＝㋑［　　］ …②

また， ∠AMC＝∠AMD＋∠DMC

∠BMD＝∠BMC＋∠㋒［　　］

仮定より， ∠AMD＝∠BMC だから，

∠AMC＝∠㋓［　　］ …③

①，②，③より，㋔［　　　　］がそれぞれ等しいから，

△AMC ≡ △BMD

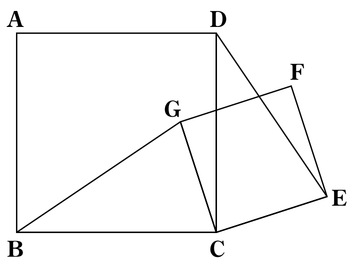
ポイント
どちらも同じ大きさの角をたしていることを表している。
○＋●

トライ 4

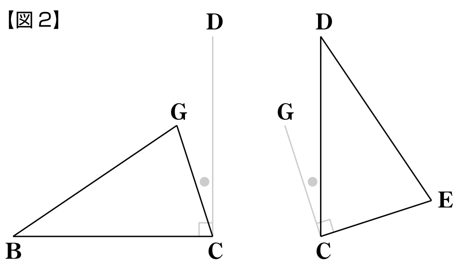
下の図のように，正方形 ABCD と正方形 CEFG がある。このとき，∠CBG＝∠CDE である。図２の中に，等しい辺や角に同じ印をつけ，△BCG ≡ △DCE となることを利用して，このことを証明しなさい。

正方形の４つの辺は等しく，１つの角は 90° である

【図１】



【図２】



【証明】 △BCG と△㋐［　　］において，

仮定より，２つの正方形の４辺はそれぞれ等しいから，

BC＝㋑［　　］ …①， CG＝㋒［　　］ …②

また，正方形の１つの角は 90° だから，

∠BCG＝∠BCD－∠GCD＝90°－∠GCD

∠DCE＝∠GCE－∠GCD＝㋓［　　］－∠GCD

よって， ∠BCG＝∠㋔［　　］ …③

①，②，③より，㋕［　　　　］がそれぞれ等しいから，

△BCG ≡△㋖［　　］

したがって，合同な図形の対応する㋗［　　］の大きさは等しいから，

∠CBG＝∠㋘［　　］

答え 発展1 ㋐ BM ㋑ MD ㋒ DMC ㋓ BMD ㋔ ２辺とその間の角

練習問題

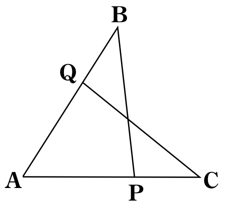
たくさん解いて，解き方を工夫したり，問題に慣れよう！

1 次のことがらの仮定と結論を書きなさい。 基本1

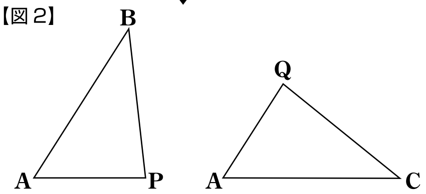
① △ABC ≡ △PQR ならば，∠A＝∠P である。
② x が６の倍数ならば，x は３の倍数である。
③ $a=b$，$b=c$ のとき，$a=c$ である。
④ $\ell /\!/ m$，$m /\!/ n$ であるとき，$\ell /\!/ n$ である。
⑤ 正三角形の３つの角は等しい。
⑥ 合同な三角形は面積が等しい。

5 下の図 1 で，AP＝AQ，∠APB＝∠AQC ならば，AB＝AC であることを証明しなさい。(図 2 の中に，等しい辺や角に同じ印をつけて考えなさい。) 基本2

【図 1】



【図 2】



【証明】△ABP と△ACQ において，

仮定より，　㋐□ ＝ ㋑□　…①

　∠㋒□ ＝ ∠㋓□　…②

共通な角だから，∠BAP＝∠㋔□　…③

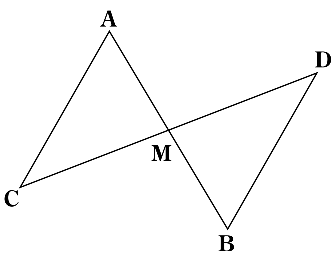
①，②，③より，㋕□ がそれぞれ等しいから，

△ABP ≡ △ACQ

したがって，合同な図形の㋖□ は等しいから，

AB＝㋗□

6 下の図で，点 M が線分 AB，CD の中点であるとき，AC∥DB であることを証明しなさい。(図の中に，等しい辺や角に同じ印をつけて考えなさい。) ステップ3



【証明】△ACM と△㋐□ において，

仮定より，㋑□ ＝ ㋒□　…①

㋓□ ＝ ㋔□　…②

㋕□ 角は等しいから，

∠㋖□ ＝ ∠㋗□　…③

①，②，③より，㋘□ がそれぞれ等しいから，

△ACM ≡ △㋙□

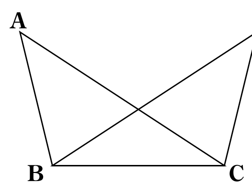
したがって，合同な図形の㋚□ は等しいから，

∠MAC＝∠㋛□

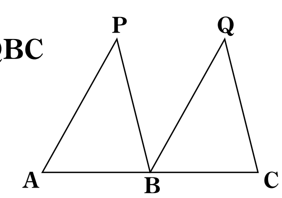
よって，㋜□ 角が等しいから，AC∥㋝□

7 右の図で，AB＝DC，AC＝DB ならば，△ABC ≡ △DCB である。このとき，次の問いに答えなさい。 基本2

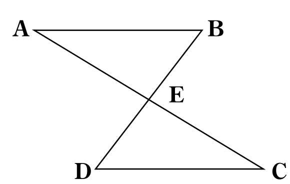
① 仮定と結論を書きなさい。　② このことを証明しなさい。



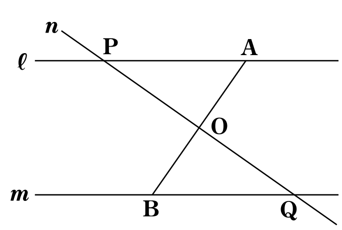
8 右の図で，点 B は線分 AC の中点で，PA＝QB，PA∥QB ならば，△PAB ≡ △QBC であることを証明しなさい。 基本2



9 右の図で，AB＝CD，AB∥DC のとき，△EAB ≡ △ECD であることを証明しなさい。 基本2



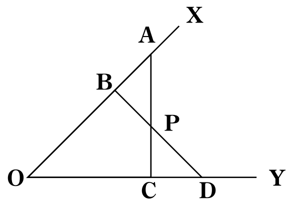
10 右の図のように，平行な 2 直線 ℓ，m がある。ℓ 上の点 A と m 上の点 B を結ぶ線分 AB の中点を O とする。点 O を通る直線 n が，ℓ，m と交わる点をそれぞれ P，Q とするとき，△OAP ≡ △OBQ であることを証明しなさい。 基本2



応用問題

さあ，チャレンジしてみよう！あきらめずに最後までトライ！

❶ 下の図のように，∠XOY の 2 辺 OX，OY 上に 4 点 A，B，C，D がある。線分 AC，BD の交点を P とし，OA = OD，OB = OC とする。このとき，AP = DP であることを証明しなさい。



【証明】

△OAC と△ODB において

仮定より，OA = ㋐＿＿＿ …①

OC = ㋑＿＿＿ …②

共通な角だから，∠AOC= ∠㋒＿＿＿ …③

①，②，③より，㋓＿＿＿＿＿ がそれぞれ

等しいから，△OAC ≡ △ODB …④

次に，△APB と△DPC において，

AB = OA − OB，DC = OD − ㋔＿＿＿

①，②より，AB = ㋕＿＿＿ …⑤

④より，∠PAB = ∠㋖＿＿＿ …⑥

∠OBD = ∠OCA …⑦

また，∠PBA = 180° − ∠OBD

∠PCD = 180° − ∠㋗＿＿＿

⑦より，∠PBA = ∠㋘＿＿＿ …⑧

⑤，⑥，⑧より，㋙＿＿＿＿＿ がそれぞれ

等しいから，△APB ≡ △DPC

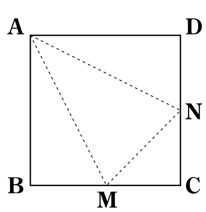
したがって，合同な図形の対応する ㋚＿＿＿

は等しいから，AP = ㋛＿＿＿

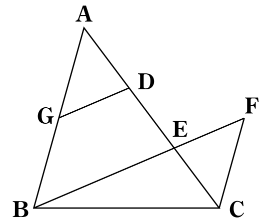
❷ 下の図で，正方形 ABCD の辺 BC，CD の中点を，それぞれ M，N とする。このとき，次の問いに答えなさい。

① △ABM ≡ △ADN であることを証明しなさい。

② ∠AMB = x°とするとき，∠MAN の大きさを x の式で表しなさい。



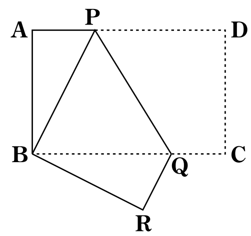
❸ 下の図で，AD = CE，AB // FC，GD // BF である。このとき，AG = CF であることを証明しなさい。



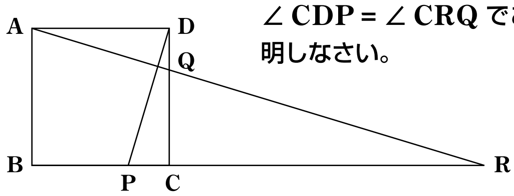
❹ 下の図のように，長方形 ABCD の紙を，点 D が点 B に重なるように折り返した。折り目を PQ とするとき，次の問いに答えなさい。

① △ABP ≡ △RBQ であることを証明しなさい。

② ∠ABP= 40°のとき，∠PQR の大きさを求めなさい。



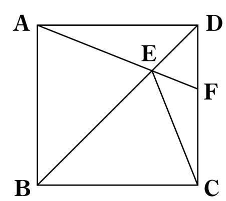
❺ 下の図のように，正方形 ABCD の辺 BC，CD 上に点 P，Q をとる。また，AQ の延長と BC の延長との交点を R とする。CP = DQ のとき，∠CDP = ∠CRQ であることを証明しなさい。



❻ 下の図のように，正方形 ABCD の対角線 BD 上に点 E をとり，AE の延長と辺 CD との交点を F とする。このとき，次の問いに答えなさい。

① ∠BCE = ∠AFD であることを証明しなさい。

② ∠DAF= 24°のとき，∠BEC は何度か。



❼ 下の図で，四角形 ABCD は正方形であり，点 M は辺 CD の中点である。また，点 E は線分 AC，BM の交点である。このとき，次の問いに答えなさい。

① △ADM ≡ △BCM であることを証明しなさい。

② 点 D と点 E を結ぶとき，次のことを証明しなさい。

1）△BCE ≡ △DCE　　2）AM ⊥ DE