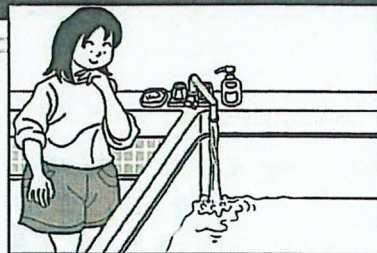


# IV 比例と反比例



はな子さんは、お母さんからお風呂の水を底から 60 cm のところまで入れるように頼まれた。しばらく見ていると、5 分間で 10 cm たまることがわかった。水の深さが 60 cm になるのは、水を入れ始めてから何分後か。



▼ 下の表は、はな子さんが水を入れ始めてからの時間  $x$  (分) と水の深さ  $y$  (cm) との関係を 15 分間調べたものである。この表を完成させて、何分後に水の深さが 60 cm になるか見つけよう。

|               |   |    |    |    |    |    |    |
|---------------|---|----|----|----|----|----|----|
| 時間 $x$ (分)    | 0 | 5  | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| 水の深さ $y$ (cm) | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |

上下に対応している数に注目して、時間と水の深さとの関係を式で表すと

$$\text{水の深さ} = 2 \times \text{時間} \Rightarrow y = 2x$$

• 水の深さが 60 cm になるのは、水を入れ始めてから 30 分後だとわかる。

ここでは、このように、ともなって変わる 2 つの量について学習する。

この単元では  
x と y のことを指す

## 確認 小学校で学習した比例の考え方

上の「わかるかな?」では、水の深さはいつも時間の 2 倍の値になっている。このとき、時間と水の深さのように、ともなって変わる 2 つの量は **比例** するという。

## 中学校で学習する、比例の考え方!

- ①  $y = 2x$  において、 $x$ 、 $y$  のようにいろいろな値をとる文字を **変数** といい、2 のように決まった数のことを **定数** という。
- ② 一般に、ともなって変わる 2 つの変数  $x$ 、 $y$  の関係が  $y = ax$  ( $a \neq 0$ ) と表されるとき、 $y$  は  $x$  に **比例** するといい、定数  $a$  を **比例定数** という。

変数

ポイント

比例

$$y = ax \quad (a \neq 0)$$

比例定数

この前の数字

## 1. 比例

### ステップ 1 関数

#### 基本パターン 1

▼ 次の①～③のことがらのうち、 $y$  が  $x$  の関数であるものには○を、そうでないものには×を〔 〕に書きなさい。

- ① 1 冊 80 円のノートを  $x$  冊買うと、代金は  $y$  円になる。〔 ○ 〕

(代金) = (1 冊の値段) × (冊数) だから、 $x = 1$  のとき  $y = 80$ 、 $x = 2$  のとき  $y = 160$ 、…… のように、 $x$  の値を決めると、 $y$  の値がただ 1 つ決まる

- ② 身長が  $x$  cm の人は、体重が  $y$  kg である。〔 × 〕

$x$  の値 (身長) を決めても、 $y$  の値 (体重) はただ 1 つに決まらない

- ③ 120 ページの本を  $x$  ページ読んだとき、残りのページ数は  $y$  ページになる。〔 ○ 〕

(残りのページ数) = (120 ページ) - (読んだページ数) だから、 $x = 1$  のとき  $y = 119$ 、 $x = 2$  のとき  $y = 118$ 、…… のように、 $x$  の値を決めると、 $y$  の値がただ 1 つ決まる

### トライ 1

次の①～④のことがらのうち、 $y$  が  $x$  の関数であるものをすべて選び、番号で答えなさい。

- ① 時速 60 km の速さで走っている自動車が、出発してから  $x$  時間で進んだ距離は  $y$  km である。
- ② 周囲の長さが  $x$  cm の長方形は、面積  $y$  cm<sup>2</sup> になる。
- ③ 年齢が  $x$  歳の人は、体重が  $y$  kg である。
- ④ 長さ 10 m の針金から  $x$  m 切りとると、残りは  $y$  m になる。

$$y = 6x$$

①、④

$$y = 10 - x$$

答え

わかるかな?

② ④ 40

⑤ 50 ⑥ 60

⑦ 2 ⑧ 30

確認! 比例

基本1

⑦ ○ ⑧ × ⑨ ○

## ステップ 2 比例する量と比例定数

### 基本学習

▼ 1本60円の鉛筆を $x$ 本買うときの代金を $y$ 円とすると、次のことについて調べよう。

- $x$ と $y$ の関係を表す右の表を完成させなさい。

|         |    |     |     |     |     |
|---------|----|-----|-----|-----|-----|
| $x$ (本) | 1  | 2   | 3   | 4   | 5   |
| $y$ (円) | 60 | 120 | 180 | 240 | 300 |

- $y$ を $x$ の式で表すと、 $y = 60x$ となる。

このとき、 $y$ は $x$ に比例するといひ、比例定数は60である。

- $x$ の値が2倍、3倍になると、 $y$ の値は2倍、3倍となる。
- 対応する $x$ 、 $y$ において、 $\frac{y}{x}$ の値はいつも一定で、 $\frac{y}{x} = 60$ である。

### ポイント

比例の関係  $y = ax$  の性質

- ①  $x$ の値が2倍、3倍…となると、 $y$ の値も2倍、3倍…となる。
- ②  $\frac{y}{x}$ の値は一定で、比例定数に等しい。  $a = \frac{y}{x}$

### ポイント

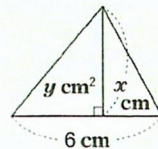
比例

$$y = ax \quad (a \neq 0)$$

比例定数

### トライ 2

底辺が6cm、高さが $x$ cmの三角形の面積を $y$ cm<sup>2</sup>とすると、次の問いに答えなさい。



- ①  $x$ と $y$ の関係を表す下の表を完成させなさい。

|                        |   |   |   |    |    |
|------------------------|---|---|---|----|----|
| $x$ (cm)               | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  |
| $y$ (cm <sup>2</sup> ) | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |

- ②  $y$ を $x$ の式で表しなさい。

$$y = 3x$$

- ③ ②のとき、比例定数を書きなさい。

3

## ステップ 3 比例の式

$y$ が $x$ に比例するとき、まず、 $y = ax$ と表し、比例定数 $a$ を求める。

### ポイント

比例  $y = ax$  の式のつくり方

$y = ax$ に $x$ 、 $y$ の値を代入して、比例定数 $a$ を求める。

### 基本パターン 2

▼  $y$ は $x$ に比例し、 $x=5$ のとき $y=-20$ である。このとき、次の問いに答えなさい。

- 1)  $y$ を $x$ の式で表しなさい。

問題文の関係を、  
まず式で表すと  $y = ax$  と表される。

これに  $x=5$ 、 $y=-20$  を代入

$$-20 = 5a$$

$$-5a = 20$$

$$a = -4$$

$$\Rightarrow \text{答え } y = -4x$$

- 2)  $x=-3$ のときの $y$ の値を求めなさい。

1)で求めた  $y = -4x$  に  $x = -3$  を代入

$$y = -4 \times (-3)$$

$$y = 12$$

### ポイント

比例の問題は  
代入が基本!

- 3)  $y=24$ のときの $x$ の値を求めなさい。

1)で求めた  $y = -4x$  に  $y = 24$  を代入

$$24 = -4x$$

$$4x = -24$$

$$x = -6$$

移項して  
方程式を解こう



比例定数を求める解法テクニック

比例では、 $\frac{y}{x}$ の値は一定で、比例定数に等しい。

よって、 $a = \frac{y}{x}$  に  $x=5$ 、 $y=-20$  を代入して、 $a = \frac{-20}{5} = -4$

### トライ 3

$y$ が $x$ に比例し、 $x=2$ のとき $y=12$ である。このとき、次の問いに答えなさい。

- ①  $y$ を $x$ の式で表しなさい。
- ②  $x=5$ のときの $y$ の値を求めなさい。
- ③  $y=-18$ のときの $x$ の値を求めなさい。

$$y = 6x$$

$$y = 30$$

$$x = -3$$

答え

基本学習

ア 120

イ 180

ウ 240

エ 300

オ 60

カ 比例

キ 60

ク 2

コ 3

ク 60

基本2

ア -4

イ -4

ウ 12

エ -6

変域は関数の中にも最重要事項。入試によく出る。

変域の意味をしっかりとみえておきましょう。  
 $x, y$  などの変数がとりうる値の範囲を、その変数の変域という。

## ステップ 3

変域

### 基本パターン 3 変域の表し方

▼ 変数  $x$  がとる値が次の場合、 $x$  の変域を不等号を使って表しなさい。

1) 0 以上 4 以下

ポイント

以上、以下はその数をふくむ。

真ん中

答え  $0 \leq x \leq 4$

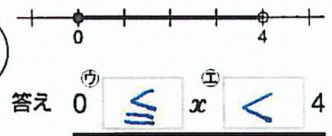
2) 0 より大きく 4 未満

ポイント

より大きい、未満はその数をふくまない。

答え  $0 < x < 4$

3) 0 以上 4 未満



答え  $0 \leq x < 4$

参考

正の数・負の数の表し方

$x > 0$  ... 「 $x$  は正の数」を表す。

$x < 0$  ... 「 $x$  は負の数」を表す。

### トライ 4

次の変数の変域を、不等号を使って表しなさい。

① 変数  $x$  の変域は、-2 以上 5 以下

$-2 \leq x \leq 5$

( $5 \geq x \geq -2$  と同じ)

② 変数  $y$  の変域は、-4 より大きく 9 以下

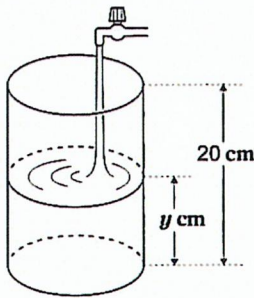
$-4 < y \leq 9$

( $9 \geq x > -4$  も同じ)

不等号の向きを  
 まらかえ「よいほう」に  
 しよう!

### 基本パターン 4 変域

▼ 深さ 20 cm の円柱形の容器に、水面の高さが毎分 4 cm ずつ高くなっていくように水を入れる。水を入れ始めてから  $x$  分後の水面の高さを  $y$  cm とするとき、次の問いに答えなさい。



1) 下の表を完成させなさい。

| $x$ (分)  | 0 | 1 | 2 | 3  | 4  | 5  |
|----------|---|---|---|----|----|----|
| $y$ (cm) | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 |

2)  $y$  を  $x$  の式で表しなさい。

1) の表より、 $y = 4x$

$\frac{y}{x}$  の値 (比例定数) は一定である

3)  $x, y$  の変域をそれぞれ求めなさい。

水を入れ始めてから、水がいっぱいになるまでだから

$x$  の変域  $0 \leq x \leq 5$

0 分以上 5 分以下

$y$  の変域  $0 \leq y \leq 20$

0 cm 以上 20 cm 以下

6分入れれば  
 容器に入る  
 水の量は  
 変わらぬ

### トライ 5

マスオ君は、200 km はなれた地点に向かって、毎時 50 km の速さの車で進む。出発してから  $x$  時間後に進んだ道のりを  $y$  km として、次の問いに答えなさい。

① 下の表を完成させなさい。

| $x$ (時間) | 0 | 1  | 2   | 3   | 4   |
|----------|---|----|-----|-----|-----|
| $y$ (km) | 0 | 50 | 100 | 150 | 200 |

②  $y$  を  $x$  の式で表しなさい。

$y = 50x$

200km 地点より  
 先にすすむことは  
 ありません。

③  $x, y$  の変域をそれぞれ求めなさい。

マスオ君は 200km を 4 時間で  
 行くのだ

$x$  の変域  $0 \leq x \leq 4$

$y$  の変域  $0 \leq y \leq 200$

$y$  の変域だから  
 $y$  にある。

答え

基本3 ㉑  $\leq$  ㉒  $<$  ㉓  $\leq$  ㉔  $<$

基本4 ㉕ 8 ㉖ 12 ㉗ 16 ㉘ 20 ㉙ 4 ㉚ 5 ㉛ 20

# 練習問題



たくさん解いて、解き方を工夫したり、問題に慣れよう！

**1** 次の①～④のことがらのうち、 $y$  が  $x$  の関数であるものをすべて選び、番号で答えなさい。 **基本1**

- ① 1本  $x$  円のボールペンを7本買うと、代金は  $y$  円である。  $y = 7x$   
 ② 40 L 入る水そうに、1分間に  $x$  L ずつ水を入れると、 $y$  分でいっぱいになる。  $y = \frac{40}{x}$   
 ③ 底辺が  $x$  cm の三角形の面積は、 $y$  cm<sup>2</sup> である。  $\leftarrow$  高さが分からない  
 ④ 18 km の道のりを進むのに、毎時  $x$  km の速さで歩くと  $y$  時間かかる。  $y = \frac{18}{x}$
- ①, ②, ④

**2** 右の表は定形外郵便物の料金表の一部である。郵便物の重さを  $x$  g, その料金を  $y$  g とするとき、次の問いに答えなさい。 **基本1**

- ① 重さが 180 g の定形外郵便物の料金は何円か。  
 ②  $y$  は  $x$  の関数であるといえるか。

| 重さ | 50 g まで | 100 g まで | 150 g まで | 250 g まで | 500 g まで |
|----|---------|----------|----------|----------|----------|
| 料金 | 120 円   | 140 円    | 200 円    | 240 円    | 390 円    |

**3** 1 辺の長さが  $x$  cm の正方形の周りの長さを  $y$  cm とするとき、次の問いに答えなさい。 **ステップ ②**

- ① 下の表を完成させなさい。

| $x$ (cm) | 1 | 2 | 3  | 4  | 5  | 6  |
|----------|---|---|----|----|----|----|
| $y$ (cm) | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 |

- ②  $y$  を  $x$  の式で表しなさい。  $y = 4x$   
 ③ ②のとき、比例定数を書きなさい。

**4** 次の①～④について、 $y$  を  $x$  の式で表しなさい。また、 $y$  が  $x$  に比例するものには [ ] にその比例定数を、比例しないものには [ ] に  $\times$  を書きなさい。 **ステップ ②**

- ① 底辺が 8 cm, 高さが  $x$  cm の三角形の面積を  $y$  cm<sup>2</sup> とする。 [ 4 ]  $y = 4x$   
 ② 1 辺の長さが  $x$  cm の正方形の面積を  $y$  cm<sup>2</sup> とする。 [  $\times$  ]  $y = x^2$   
 ③ はな子さんは時速 7 km で歩く。はな子さんが歩き始めてから  $x$  時間後の道のりは  $y$  km である。 [ 7 ]  
 ④ 300 ページの本を  $x$  ページ読んだとき、残りは  $y$  ページとなる。 [  $\times$  ]  $y = 300 - x$

**5**  $y$  が  $x$  に比例し、 $x, y$  の値が次の場合、 $y$  を  $x$  の式で表しなさい。 **基本2**

- ①  $x = 2$  のとき  $y = 8$   $y = 4x$       ②  $x = 6$  のとき  $y = -12$   $y = -2x$       ③  $x = -4$  のとき  $y = -24$   $y = 6x$   
 ④  $x = -9$  のとき  $y = 45$   $y = -5x$       ⑤  $x = \frac{2}{3}$  のとき  $y = -4$   $y = -6x$       ⑥  $x = 6$  のとき  $y = 3$   $y = \frac{1}{2}x$

**6** 次の問いに答えなさい。 **基本2**

- ①  $y$  が  $x$  に比例し、 $x = 5$  のとき  $y = 20$  である。  
 1)  $y$  を  $x$  の式で表しなさい。  $y = 4x$       2)  $x = 3$  のときの  $y$  の値を求めなさい。  $y = 12$   
 3)  $x = -6$  のときの  $y$  の値を求めなさい。  $y = -24$   
 ②  $y$  が  $x$  に比例し、 $x = -3$  のとき  $y = 18$  である。  
 1)  $y$  を  $x$  の式で表しなさい。  $y = -6x$       2)  $x = 5$  のときの  $y$  の値を求めなさい。  $y = -30$   
 3)  $y = -12$  のときの  $x$  の値を求めなさい。  $x = 2$

7

次の問いに答えなさい。基本2

- ①  $y$  が  $x$  に比例し、 $x=2$  のとき  $y=-8$  である。 $x, y$  の値が次の場合、それぞれに対応する  $y, x$  の値を求めなさい。

1)  $x=-3$   $y=12$       2)  $x=\frac{3}{2}$   $y=-6$       3)  $y=-12$   $x=3$       4)  $y=28$   $x=-7$

- ②  $y$  が  $x$  に比例し、 $x=-9$  のとき  $y=-6$  である。 $x, y$  の値が次の場合、それぞれに対応する  $y, x$  の値を求めなさい。

1)  $x=6$   $y=4$       2)  $y=-12$   $x=-18$       3)  $y=-4$   $x=-6$       4)  $y=\frac{10}{3}$   $x=5$

8

変数  $x, y$  のとる値が次の場合、 $x, y$  の変域をそれぞれ不等号を使って表しなさい。基本3

- ①  $x$  の変域… 1)  $-4$  以上  $8$  以下      2)  $0$  以上  $12$  未満      3)  $-8$  より大きく  $-2$  以下  
 $-4 \leq x \leq 8$        $0 < x < 12$        $-8 < x < -2$
- ②  $y$  の変域… 1)  $0$  以上      2)  $-2$  以上  $6$  以下      3)  $-7$  より大きく  $4$  未満  
 $0 \leq y$        $-2 \leq y \leq 6$        $-7 < y < 4$

9

深さ  $48$  cm の円柱形の容器に、水面の高さが毎分  $6$  cm ずつ高くなるように水を入れる。水を入れ始めてから  $x$  分後の水面の高さを  $y$  cm とするとき、次の問いに答えなさい。基本4

- ① 下の表を完成させなさい。

|          |   |   |    |    |    |    |     |
|----------|---|---|----|----|----|----|-----|
| $x$ (分)  | 0 | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | ... |
| $y$ (cm) | 0 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | ... |

- ②  $y$  を  $x$  の式で表しなさい。  $y=6x$

- ③  $x, y$  の変域をそれぞれ求めなさい。

$0 \leq x \leq 8, 0 \leq y \leq 48$

10

21 km はなれた目的地に向かうのに、出発してから  $x$  時間後に  $y$  km 進んだとすると、 $x$  と  $y$  の関係は下の表のようになった。このとき、次の問いに答えなさい。基本4

|          |     |   |      |    |     |
|----------|-----|---|------|----|-----|
| $x$ (時間) | 1   | 2 | 3    | 4  | ... |
| $y$ (km) | 3.5 | 7 | 10.5 | 14 | ... |

- ①  $y$  を  $x$  の式で表しなさい。  $y=3.5x (= \frac{7}{2}x)$

- ②  $x$  の変域を求めなさい。  $0 \leq x \leq 6$

11

 $y$  が  $x$  に比例し、 $x$  と  $y$  の関係は下の表のようになる。このとき、 $y$  を  $x$  の式で表し、また、表の空らんをうめなさい。

①

|     |   |    |    |    |    |
|-----|---|----|----|----|----|
| $x$ | 3 | 5  | 7  | 8  | 13 |
| $y$ | 6 | 10 | 14 | 16 | 26 |

$y=2x$  と  $\frac{1}{2}x$  が?

②

|     |     |    |    |   |    |    |
|-----|-----|----|----|---|----|----|
| $x$ | -12 | -6 | -3 | 0 | 3  | 18 |
| $y$ | 4   | 2  | 1  | 0 | -1 | -6 |

$y=-\frac{1}{3}x$  と  $\frac{1}{2}x$  が?

## 応用問題

さあ、チャレンジしてみよう！あきらめずに最後までトライ！

1

縦  $30$  cm、横  $20$  cm、高さ  $40$  cm の直方体の容器に、毎分  $3$  L の割合で水を入れていく。水を入れ始めてから  $x$  分後の水面の高さを  $y$  cm とするとき、次の問いに答えなさい。

- ①  $y$  を  $x$  の式で表しなさい。  $y=5x$       ② 2 分後には、水面の高さは何 cm になるか。

- ③  $x$  の変域を求めなさい。

$0 \leq x \leq 8$

2

 $y$  は  $x$  に比例し、 $z$  は  $y$  に比例していて、 $x=-2$  のとき  $y=6$ 、 $y=15$  のとき  $z=20$  である。このとき、次の問いに答えなさい。

- ①  $y$  を  $x$  の式で表しなさい。  $y=-3x$       ②  $z$  を  $y$  の式で表しなさい。  $z=\frac{4}{3}y$       ③  $z$  を  $x$  の式で表しなさい。  $z=-4x$

- ④  $x=6$  のときの  $z$  の値を求めなさい。

$z=-24$

- ⑤  $z=-12$  のときの  $x$  の値を求めなさい。

$x=3$