2．円とおうぎ形・正多角形

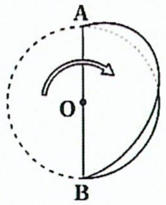
ステップ① 円の弧と弦

点Oを中心とする円を**円O**といい，円の周のことを円周という。

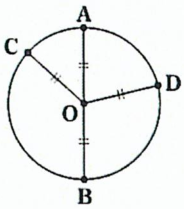
円周のことを，単に円ともいう

基本学習

▼ 右の図のように，中心Oを通る線分ABで，円Oを2つに折ると重なり合った。これを参考にして，円の性質について調べてみよう。



- 円は ㋐ 線 対称な図形であり，折り目にした線分ABは，その円の ㋑ 直径 である。
- 円周上の点A～Dは，どの点も中心Oからの距離が等しい。この距離は円の ㋒ 半径 である。

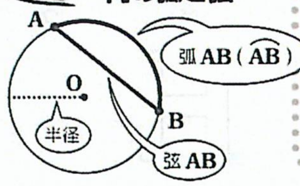


❶ 円周上の点AからBまでの部分を**弧AB**といい，$\overset{\frown}{AB}$と表す。 よく使います

❷ $\overset{\frown}{AB}$の両端を結んだ線分ABを**弦AB**という。

ちがいをおさえておきましょう

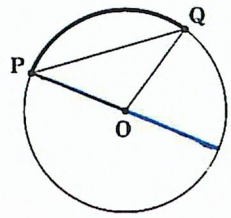
ポイント 円の弧と弦



参考

弧ABは弦ABの左右両側にできる。しかし，弧ABというときは，ふつう，長さの短い方をさす。

トライ① 右の図の円Oについて，次の問いに答えなさい。



① 太線で表した円周の一部分を記号を使って表しなさい。 $\overset{\frown}{PQ}$

② 線分PQを何というか。 弦PQ

③ 線分OPとOQの長さの関係を式で表しなさい。 OP＝OQ

④ 円Oの中に，点Pを通り，長さが最も長くなる弦をかきなさい。 中心Oを通る直径が最も長くなります.

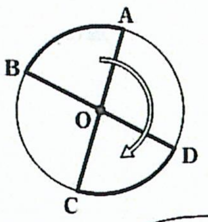
ステップ② おうぎ形

円の2つの半径と弧で囲まれた図形を**おうぎ形**という。

基本学習

▼ 下の図のように，点Oを中心として，おうぎ形OABを180°回転させたおうぎ形OCDをつくった。このとき，おうぎ形の性質について調べてみよう。

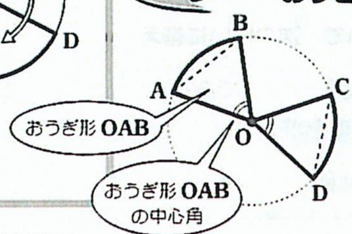
- 円は ㋐ 点 対称な図形でもあり，円の中心Oは，対称の ㋑ 中心 である。
- ∠AOBと等しいのは，∠ ㋒ COD である。
- 弧ABと長さが等しいのは，弧 ㋓ CD である。



❶ 左の基本学習の図の円Oにおいて，∠AOBを，おうぎ形OABの**中心角**という。（∠AOBを$\overset{\frown}{AB}$に対する中心角，$\overset{\frown}{AB}$を中心角∠AOBに対する弧ともいう。）

❷ 1つの円で，等しい中心角に対する弧や弦の長さは等しい。また，弧の長さは中心角の大きさに比例して大きくなる。

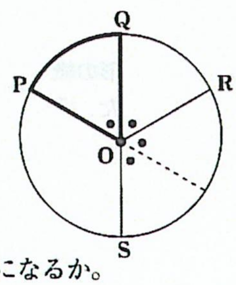
ポイント おうぎ形の性質



∠AOB＝∠CODのとき，おうぎ形OABとおうぎ形CODは合同

$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，AB＝CD

トライ② 右の図の円Oについて，次の問いに答えなさい。



① 図形OPQを何というか。 おうぎ形 OPQ

② ∠POQを，図形OPQの何角というか。 中心角

③ ∠POQ＝∠QORのとき，$\overset{\frown}{PQ}$と$\overset{\frown}{QR}$の長さの関係を式で表しなさい。 $\overset{\frown}{PQ}=\overset{\frown}{QR}$

④ ∠ROSが∠POQの2倍の大きさのとき，$\overset{\frown}{RS}$の長さは$\overset{\frown}{PQ}$の長さの何倍になるか。 2倍

答え

基本学習 ㋐ 線 ㋑ 直径 ㋒ 半径

基本学習 ㋐ 点 ㋑ 中心 ㋒ COD ㋓ CD

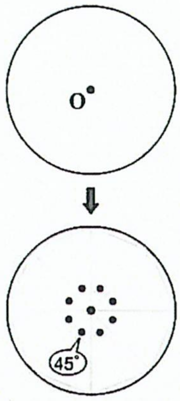
π を使う計算は必ずマスターさせましょう。

ステップ 3 円と正多角形

すべての辺の長さと角の大きさが等しい多角形を**正多角形**という。

基本パターン 1

▼ 右の図の円Oで，分度器を使って，正八角形をかきなさい。



- 1つの円で，等しい中心角に対する弦の長さは等しい。

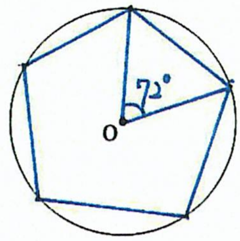
↓

- 中心Oのまわりの360°を8等分する角度を求める。

$360° \div 8 =$ 45 °（1つの中心角）

トライ 3

下の図の円Oで，分度器を使って，正五角形をかきなさい。



ステップ 4 円の周の長さと面積

確認 円周＝直径×円周率，面積＝半径×半径×円周率

円周率とは，円周が直径の何倍かを表した割合である。現在，その値は3.141592653589…と，2000億けた以上ものくわしい値が求められている。ふつう，円周率をギリシア文字 π（パイ）で表す。→「π」も文字のうちの1つです。

ポイント 円の周の長さと面積

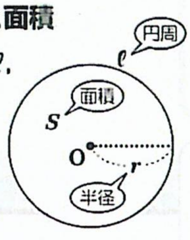
半径 r の円の周の長さを ℓ，面積を S とすると

暗記

円周 $\ell = 2\pi r$

面積 $S = \pi r^2$

πは文字の前です



基本パターン 2

▼ 半径4cmの円の周の長さと面積を求めなさい。

左のポイントの公式に，$r = 4$ を代入して求めよう！

（$2\pi r$ に $r = 4$ を代入）（πr^2 に $r = 4$ を代入）

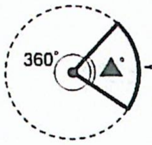
- 円周は，$2\pi \times 4 =$ ㋐ 8π (cm)
- 面積は，$\pi \times 4^2 =$ ㋑ 16π (cm²)

3.14の計算はしなくてよいです。

ステップ 5 おうぎ形の弧の長さと面積

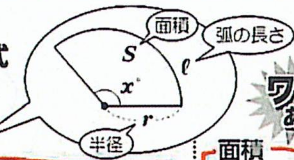
1つの円では，おうぎ形の弧の長さや面積は，その中心角の大きさに比例して大きくなる。

中心角▲°のおうぎ形の弧の長さは，同じ半径の円周の $\frac{▲}{360}$ 倍になる。



ポイント おうぎ形の弧の長さと面積の公式

半径 r，中心角 $x°$ のおうぎ形の弧の長さを ℓ，面積を S とすると



大切

弧の長さ $\ell = 2\pi r \times \frac{x}{360}$　　面積 $S = \pi r^2 \times \frac{x}{360}$

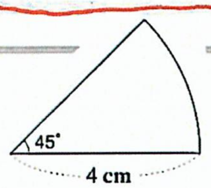
ワザあり!!

面積 $S = \frac{1}{2}\ell r$

知っておくとトク

基本パターン 3

▼ 半径4cm，中心角45°のおうぎ形の弧の長さと面積を求めなさい。



右上のポイントの公式に，$r = 4$，$x = 45$ を代入して求めよう！

- 弧の長さは，$2\pi \times 4 \times \frac{45}{360} = 2\pi \times 4 \times \frac{1}{8} =$ ㋐ π (cm)
- 面積は，$\pi \times 4^2 \times \frac{45}{360} = \pi \times \overset{2}{16} \times \frac{1}{8} =$ ㋑ 2π (cm²)

ワザあり!! おうぎ形の面積の解法テクニック

弧の長さは π cm だから，（$\ell = \pi$，$r = 4$ を代入）

面積は，$\frac{1}{2}\ell r = \frac{1}{2} \times \pi \times 4 = \underline{2\pi\ (cm^2)}$

トライ 4

半径6cm，中心角120°のおうぎ形について，次の①，②を求めなさい。

① 弧の長さ

$2\pi \times 6 \times \frac{120}{360} = \underline{4\pi\ (cm)}$

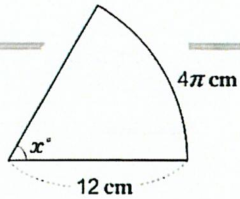
② 面積

$\pi \times 6^2 \times \frac{120}{360} = \underline{12\pi\ (cm^2)}$

答え 基本1 45　基本2 ㋐ 8π ㋑ 16π　基本3 ㋐ π ㋑ 2π

発展パターン 1

▼ 半径 12 cm，弧の長さ 4π cm のおうぎ形の中心角を求めなさい。



中心角を x° とする。$\ell=2\pi r\times\frac{x}{360}$ に $\ell=4\pi$，$r=12$ を代入して

$$4\pi = 2\pi\times 12\times\frac{x}{360_{15}}$$

両辺から π をとり，まず約分

$$4=\frac{x}{15}$$

$x=$ ㋐ 60 ⇒ 答え ㋑ 60 °

ポイント 中心角の求め方

公式 $\ell=2\pi r\times\frac{x}{360}$，$S=\pi r^2\times\frac{x}{360}$ に，わかっている値を代入して方程式を解き，x を求める。

ワザあり!! 中心角を求める解法テクニック

$$\text{中心角}=360^\circ\times\frac{\text{おうぎ形}}{\text{円}}$$

$\times\frac{\text{弧の長さ}}{\text{円周}}$，$\times\frac{\text{おうぎ形の面積}}{\text{円の面積}}$

半径 12 cm の円周は，$2\pi\times12=24\pi$ (cm)

$$\text{中心角}=360^\circ\times\frac{4\pi}{24\pi}$$

弧の長さ　円周

$$=360^\circ\times\frac{1}{6}$$

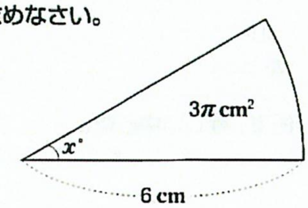
$$=60^\circ$$

πも約分できます。

トライ 5

中心角 $=360^\circ\times\frac{\text{おうぎ形の面積}}{\text{円の面積}}$

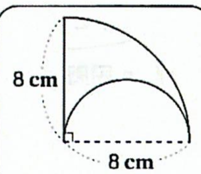
半径 6 cm，面積 3π cm^2 のおうぎ形の中心角を求めなさい。



$$360\times\frac{3\pi}{\pi\times6^2}=30^\circ$$

周りの長さと面積は意味がちがってくるので気をつけましょう。

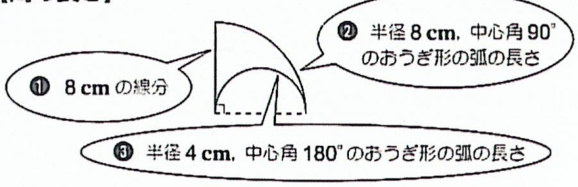
ステップ 6 組み合わされた図形



発展パターン 2

▼ 右の図のように，おうぎ形を組み合わせてできた灰色部分の周の長さと面積を求めなさい。

【周の長さ】



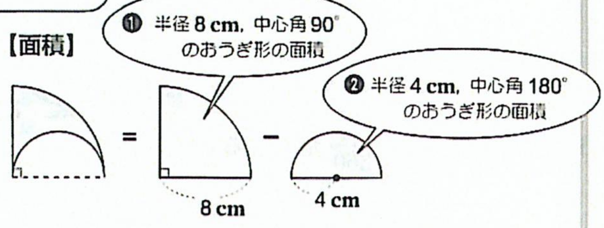
● 求める周の長さは，上の図の❶，❷，❸の和だから

$$\underbrace{8}_{❶}+\underbrace{2\pi\times8\times\frac{90}{360}}_{❷}+\underbrace{2\pi\times4\times\frac{180}{360}}_{❸}$$

$$=8+4\pi+4\pi$$

$=$ ㋐ 8 $\pi+$ ㋑ 8 (cm) ←必ず(　)をつけるようにしましょう。

【面積】



● 求める面積は，❶－❷で求めることができる。

$$\underbrace{\pi\times8^2\times\frac{90}{360}}_{❶}-\underbrace{\pi\times4^2\times\frac{180}{360}}_{❷}$$

$$=\pi\times64\times\frac14-\pi\times16\times\frac12$$

$$=16\pi-8\pi$$

$=$ ㋒ 8 π (cm^2)

トライ 6

右の図のように，おうぎ形を組み合わせてできた灰色部分の図形について，次の①，②を求めなさい。

① 周の長さ

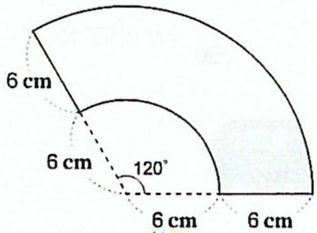
$$6\times2+2\pi\times6\times\frac{120}{360}+2\pi\times12\times\frac{120}{360}$$

$$=12\pi+12\ \text{(cm)}$$

② 面積

$$\pi\times12^2\times\frac{120}{360}-\pi\times6^2\times\frac{120}{360}$$

$$=36\pi\ (\text{cm}^2)$$



答え

発展1 ㋐ 60 ㋑ 60

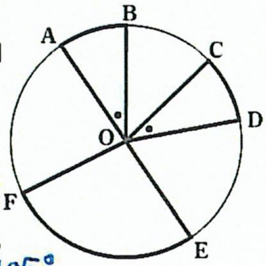
発展2 ㋐ 8 ㋑ 8 ㋒ 8

問題に慣れておきましょう。

練習問題

たくさん解いて，解き方を工夫したり，問題に慣れよう！

1 **右の図の円 O で，線分 AE は直径で，• の角度はすべて等しいとき，次の問いに答えなさい。** ステップ①②



① おうぎ形 OAB において，円周上の点 A から B の部分を何というか。弧AB

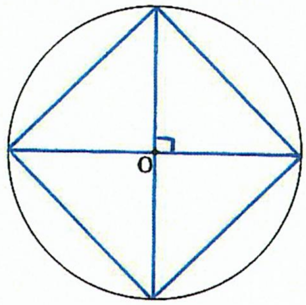
② ∠AOB＝∠COD のとき，弦 AB と弦 CD の長さの関係を式で表しなさい。AB＝CD

③ 図の点 A ～ F のうち 2 点を結んで弦をかくとき，長さが最も長くなる弦はどれか。弦AE

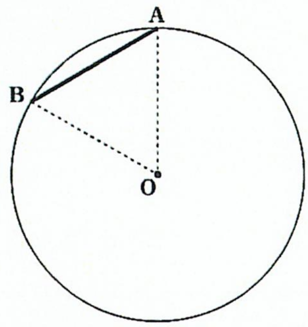
④ ∠AOB＝35°で，$\overset{\frown}{EF}$ の長さが $\overset{\frown}{AB}$ の長さの 3 倍であるとき，∠EOF の大きさは何度か。

105°

2 **右の図の円 O で，分度器を使って，正四角形をかきなさい。** 基本1



3 **右の図は，円 O を使って正六角形 ABCDEF をつくっている途中のようすである。次の問いに答えなさい。** ステップ②③



① ∠AOB，∠OAB の大きさを求めなさい。∠AOB＝60° ∠OAB＝60°

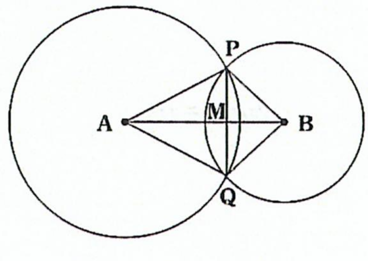
② 正六角形 ABCDEF をつくるには，おうぎ形 OAB と合同なおうぎ形が，全部で何枚必要か。

6枚

③ 円 O の半径が 2 cm のとき，この正六角形 ABCDEF の周囲の長さを求めなさい。

12cm

4 **右の図は，点 A，B を中心とする 2 つの円の交点を P，Q とし，線分 AB と PQ との交点を M としたものである。四角形 AQBP について，次の問いに答えなさい。** ステップ①②



① 等しい線分の組をすべてみつけ，式で表しなさい。

AP＝AQ，BP＝BQ，PM＝QM

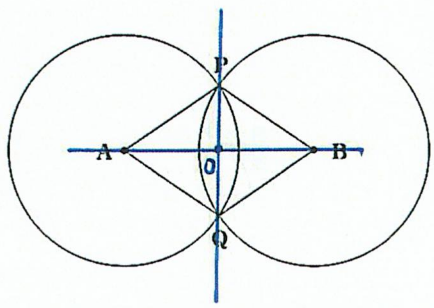
② ∠PAB と等しい角はどれか，記号で答えなさい。

∠QAB

③ 線分 AB と PQ の位置関係を式で表しなさい。

AB⊥PQ

5 **右の図は，半径の等しい 2 つの円の交点を P，Q としたものである。四角形 AQBP について，次の問いに答えなさい。** ステップ①②



① この図形の対称の軸を，図にすべてかきなさい。

② この図形の対称の中心 O を，図にかきなさい。

③ 線分 AP と等しい線分をすべて答えなさい。

AQ，BP，BQ

6 **次の円の周の長さと面積を求めなさい。** 基本2

① 半径 3 cm の円
円周 6π(cm) 面積 9π(cm²)

② 半径 10 cm の円
円周 20πcm 面積 100π(cm²)

③ 直径 8 cm の円
円周 8π(cm) 面積 16π(cm²)

④ 半径 6 cm の円
円周 12π(cm) 面積 36π(cm²)

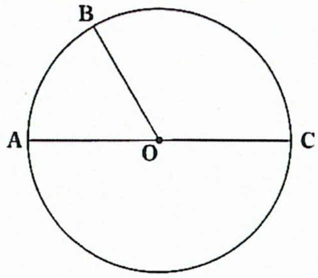
⑤ 半径 12 cm の円
円周 24πcm 面積 144π(cm²)

⑥ 直径 40 cm の円
円周 40π(cm) 面積 400π(cm²)

答えが式になるときは必ず単位に(　)をつけましょう。

7

右の図の円Oにおいて，ACは直径，∠AOB＝60°である。このとき，次の問いに答えなさい。 ステップ5



① $\overset{\frown}{BC}$ の長さは，$\overset{\frown}{AB}$ の長さの何倍か。　2倍

② $\overset{\frown}{BC}$ の長さは，円Oの周の長さの何倍か。　$\frac{1}{3}$倍

③ おうぎ形OABの面積は，円Oの面積の何倍か。　$\frac{1}{6}$倍

8

半径と中心角が次のようなおうぎ形の弧の長さと面積を求めなさい。 基本3

① 半径6 cm，中心角60°
弧 2π(cm) 面積 6π(cm²)

② 半径9 cm，中心角120°
弧 6π(cm) 面積 27π(cm²)

③ 半径10 cm，中心角36°
弧 2π(cm) 面積 10π(cm²)

④ 半径5 cm，中心角144°
弧 4π(cm) 面積 10π(cm²)

⑤ 半径4 cm，中心角225°
弧 5π(cm) 面積 10π(cm²)

⑥ 半径6 cm，中心角270°
弧 9π(cm) 面積 27π(cm²)

⑦ 半径3 cm，中心角80°
弧 $\frac{4}{3}\pi$(cm) 面積 2π(cm²)

⑧ 半径8 cm，中心角150°
弧 $\frac{20}{3}\pi$(cm) 面積 $\frac{80}{3}\pi$(cm²)

⑨ 半径12 cm，中心角135°
弧 9π(cm) 面積 54π(cm²)

9

半径と弧の長さが次のようなおうぎ形の面積を求めなさい。 ステップ5

① 半径6 cm，弧の長さ 2π cm
6π cm²

② 半径9 cm，弧の長さ 4π cm
18π cm²

③ 半径8 cm，弧の長さ 8π cm
32π cm²

10

半径と弧の長さや面積が，次のようなおうぎ形の中心角を求めなさい。 発展1

① 半径4 cm，弧の長さ 4π cm
180°

② 半径6 cm，弧の長さ 2π cm
60°

③ 半径10 cm，弧の長さ 4π cm
72°

④ 半径9 cm，弧の長さ 12π cm
240°

⑤ 半径12 cm，弧の長さ 18π cm
270°

⑥ 半径16 cm，弧の長さ 20π cm
225°

⑦ 半径3 cm，面積 3π cm²
120°

⑧ 半径6 cm，面積 4π cm²
40°

⑨ 半径8 cm，面積 16π cm²
90°

⑩ 半径6 cm，面積 30π cm²
300°

⑪ 半径10 cm，面積 60π cm²
216°

⑫ 半径12 cm，面積 54π cm²
135°

11

半径と面積が次のようなおうぎ形の中心角と弧の長さを求めなさい。 ステップ6

① 半径6 cm，面積 12π cm²
中心角120°　弧 4πcm

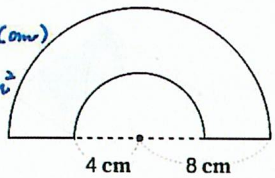
② 半径5 cm，面積 10π cm²
中心角144°　弧 4πcm

③ 半径9 cm，面積 18π cm²
中心角80°　弧 4πcm

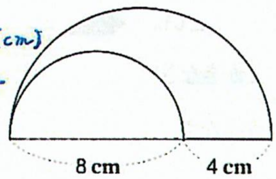
12

次の図は，おうぎ形や正方形で組み合わされた図形である。灰色部分の周の長さと面積を求めなさい。 発展2

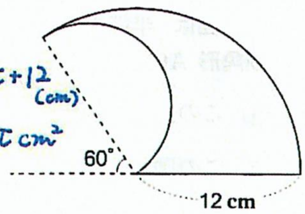
①
周 $12\pi+8$(cm)
面 24πcm²



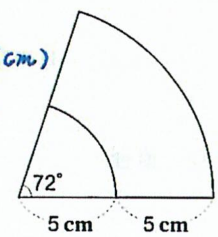
②
周 $10\pi+4$(cm)
面 10πcm²



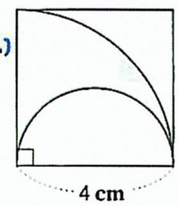
③
周 $14\pi+12$(cm)
面 30πcm²



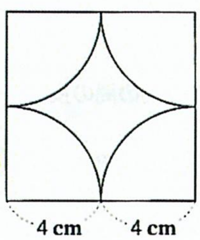
④
周 $6\pi+10$(cm)
面 15πcm²



⑤
周 $4\pi+4$(cm)
面 2πcm²



⑥
周 8πcm
面 $64-16\pi$(cm²)

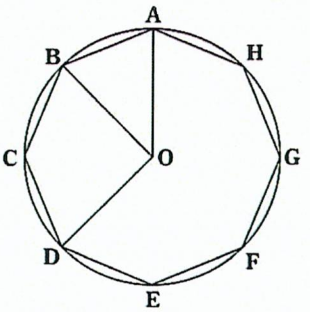


中上位クラスは解いておこう。そこまで難しくはないです。

応用問題

さあ，チャレンジしてみよう！あきらめずに最後までトライ！

1 右の図は，半径 4 cm の円 O を使って正八角形をかいたものである。このとき，次の問いに答えなさい。



① ∠AOB の大きさを求めなさい。 45°

② $\overset{\frown}{AB}$ の長さを求めなさい。 π cm

③ $\overset{\frown}{ABCD}$ と 2 つの半径 OA，OD で囲まれたおうぎ形の面積を求めなさい。

$\pi \times 4^2 \times \frac{3}{8} = 6\pi\ \text{cm}^2$

2 中心角と弧の長さが次のようなおうぎ形の半径を求めなさい。

① 中心角 30°，弧の長さ π cm　6cm

② 中心角 120°，弧の長さ 6π cm　9cm

③ 中心角 144°，弧の長さ 4π cm　5cm

3 中心角と弧の長さが次のようなおうぎ形の面積を求めなさい。

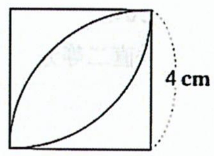
① 中心角 60°，弧の長さ 2π cm　$6\pi\ \text{cm}^2$

② 中心角 135°，弧の長さ 6π cm　$24\pi\ \text{cm}^2$

③ 中心角 270°，弧の長さ 18π cm　$108\pi\ \text{cm}^2$

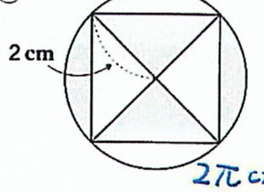
4 次の図は，円や正方形，おうぎ形で組み合わされた図形である。灰色部分の面積を求めなさい。

①



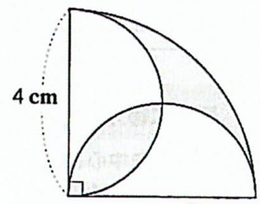
$8\pi - 16\ (\text{cm}^2)$

②



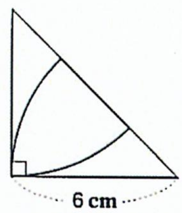
$2\pi\ \text{cm}^2$

③



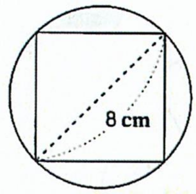
$4\pi - 8\ (\text{cm}^2)$

④



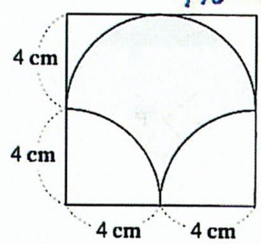
$9\pi - 18\ (\text{cm}^2)$

⑤



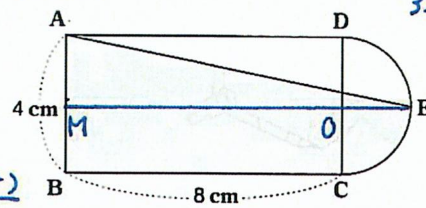
$16\pi - 32\ (\text{cm}^2)$

⑥



$32\ \text{cm}^2$

5 右の図は，長方形と半円を組み合わせた図形で，点 E は $\overset{\frown}{CD}$ の中点である。このとき，灰色部分の面積を求めなさい。

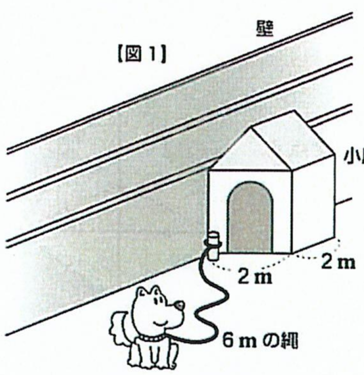


ME = MO + OE = 10 cm

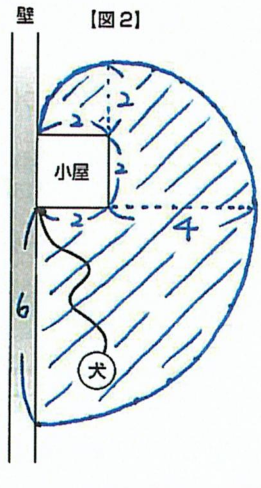
$2 \times 10 \times \frac{1}{2} + 2 \times 8 + \pi \times 2^2 \times \frac{90}{360} = \pi + 26\ (\text{cm}^2)$

6 右の図 1 は，1 辺 2 m の正方形の犬小屋に，犬が 6 m の縄でつながれているようすを表している。また，図 2 は，このようすを上から見たものであり，2 m を 1 cm，6 m を 3 cm の長さに小さくして表している。このとき，次の問いに答えなさい。

【図 1】



【図 2】



① 犬が動くことのできる範囲を，図 2 にコンパスで作図して，斜線で示しなさい。

② 犬が動くことのできる範囲の面積を求めなさい。

$\pi \times 6^2 \times \frac{180}{360} + \pi \times 4^2 \times \frac{90}{360} + \pi \times 2^2 \times \frac{90}{360} = 14\pi\ \text{m}^2$