

1つ1つていねいによく考えよう。定期テストによく出る単元だよ。

4. 立体の表面積と体積

ステップ 1 角柱・円柱の表面積

立体の1つの底面の面積を**底面積**、側面全体の面積を**側面積**、
立体の表面全体の面積を**表面積**という。

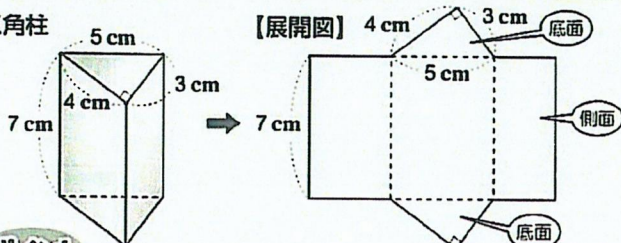
基本パターン 1

▼ 次の図の立体の表面積を求めなさい。

ポイント

角柱・円柱の表面積 = 側面積 + 底面積 × 2

1) 三角柱



ポイント

角柱・円柱の側面となる長方形

縦の長さ = 立体の高さ 横の長さ = 底面の周の長さ

• 底面積 = $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$ (cm²)

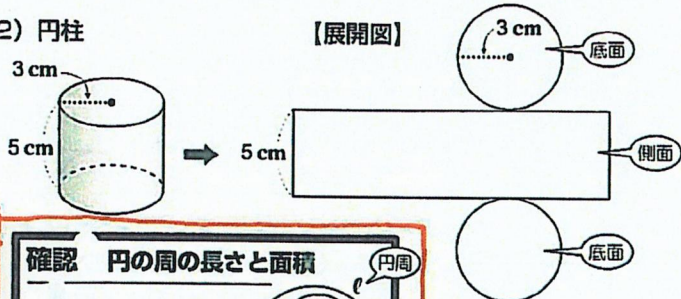
• 側面となる長方形の縦の長さは 7 cm

横の長さは、3 + 4 + 5 = 12 (cm) だから、

側面積 = $7 \times 12 = 84$ (cm²)

• 表面積 = $84 + 6 \times 2 = 96$ (cm²)

2) 円柱



確認 円の周の長さ

円周 $\ell = 2\pi r$

面積 $S = \pi r^2$

• 底面積 = $\pi \times 3^2 = 9\pi$ (cm²)

• 側面となる長方形の縦の長さは 5 cm

横の長さは、 $2\pi \times 3 = 6\pi$ (cm) だから、

側面積 = $5 \times 6\pi = 30\pi$ (cm²)

• 表面積 = $30\pi + 9\pi \times 2 = 48\pi$ (cm²)

トライ 1

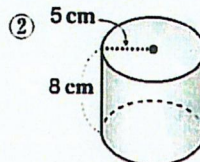
右の図の角柱・円柱の表面積を求めなさい。

底面積: $5 \times 4 = 20$

側面積: $6 \times (5+4) \times 2 = 108$
横の長さ

表面積

$108 + 20 \times 2 = 148$ cm²



表面積

$80\pi + 25\pi \times 2 = 130\pi$ cm²

底面積: $\pi \times 5^2 = 25\pi$

側面積: $8 \times 2\pi \times 5 = 80\pi$
横の長さ

ステップ 2 角柱・円柱の体積

基本パターン 2

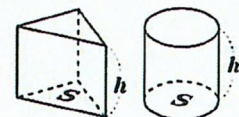
▼ 下の図の円柱の体積を求めなさい。

体積 = $\pi \times 3^2 \times 5 = 45\pi$ (cm³)

ポイント

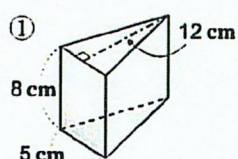
角柱・円柱の体積 = 底面積 × 高さ

角柱・円柱の底面積を S 、高さを h 、
体積を V とすると、 $V = Sh$

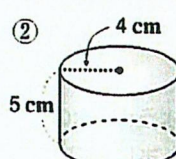


トライ 2

下の図の角柱・円柱の体積を求めなさい。



$5 \times 12 \times \frac{1}{2} \times 8 = 240$ cm³



$\pi \times 4^2 \times 5 = 80\pi$ cm³

答え 基本 1 a 6 b 84 c 96 d 9π e 30π
か 48π 基本 2 a 5 b 45π

計算まちがい。もしないように気をつけましょう。

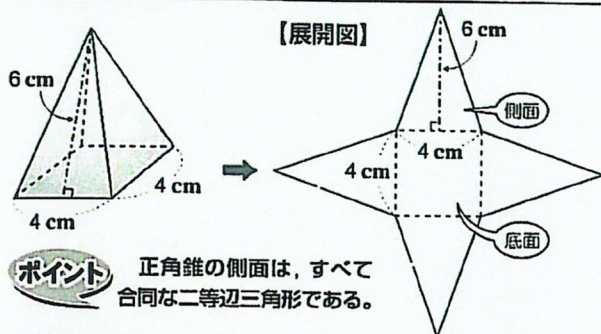
ステップ 3 角錐・円錐の表面積

ポイント

角錐・円錐の表面積 = 側面積 + 底面積

基本パターン 3 角錐の表面積

▼ 下の図の正四角錐の表面積を求めなさい。



ポイント 正角錐の側面は、すべて合同な二等辺三角形である。

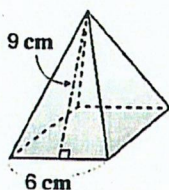
• 底面積 = $4 \times 4 = 16$ (cm²)

• 側面積 = $\frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times 4 = 48$ (cm²)

• 表面積 = $48 + 16 = 64$ (cm²)

トライ 3

右の図の正四角錐の表面積を求めなさい。



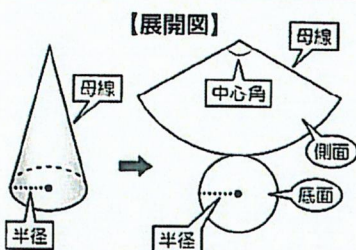
底面積 = $6 \times 6 = 36$

側面積 = $6 \times 9 \times \frac{1}{2} \times 4 = 108$

表面積 = $108 + 36 = 144$ cm²

基本学習

▼ p.142 で学習した 半径 = 母線 $\times \frac{\text{中心角}}{360^\circ}$ の関係を使って、円錐についてもっと調べてみよう。



• 中心角を楽に求める方法を見つけよう。

母線 $\times \frac{\text{中心角}}{360^\circ} = \text{半径}$

中心角 = $\frac{\text{半径}}{\text{母線}} \times 360^\circ$

中心角 = $360^\circ \times \frac{\text{半径}}{\text{母線}}$

• 側面のおうぎ形の面積を楽に求める方法を見つけよう。

側面積 = $\pi \times \text{母線}^2 \times \frac{\text{中心角}}{360^\circ}$

= $\pi \times \text{母線} \times \text{母線} \times \frac{\text{中心角}}{360^\circ}$

側面積 = $\pi \times \text{母線} \times \text{半径}$

確認 おうぎ形の面積

$S = \pi r^2 \times \frac{x}{360}$



ワザあり

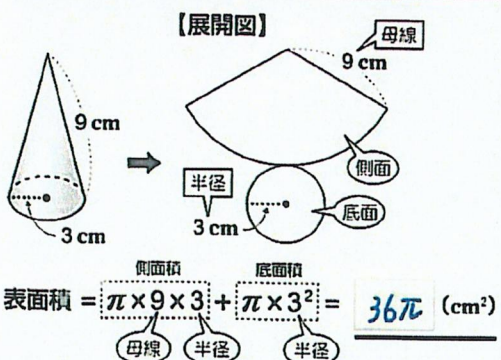
円錐の中心角と側面積

中心角 = $360^\circ \times \frac{\text{半径}}{\text{母線}}$

側面積 = $\pi \times \text{母線} \times \text{半径}$

基本パターン 4 円錐の表面積

▼ 下の図の円錐の表面積を求めなさい。



表面積 = $\pi \times 9 \times 3 + \pi \times 3^2 = 36\pi$ (cm²)

トライ 4 右の図の円錐について、次の問いに答えなさい。

① 側面となるおうぎ形の中心角は何度か。

$360 \times \frac{2}{8} = 90^\circ$

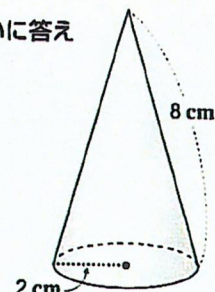
② 側面積を求めなさい。

$\pi \times 8 \times 2 = 16\pi$ cm²

③ 表面積を求めなさい。

底面積 = $\pi \times 2^2 = 4\pi$

$16\pi + 4\pi = 20\pi$ cm²



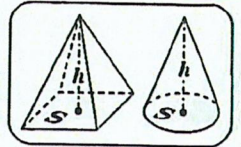
答え 基本3 あ 16 い 48 う 64

基本学習 あ 360 い 半径 基本4 36π

ステップ 4 角錐・円錐の体積

ポイント

角錐・円錐の体積 $= \frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高さ}$

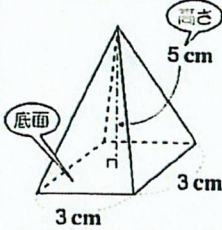


角錐・円錐の底面積を S 、高さを h 、体積を V とすると、 $V = \frac{1}{3}Sh$

基本パターン (5)

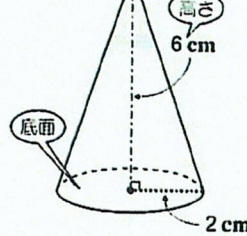
▼ 次の図の立体の体積を求めなさい。

1) 正四角錐



体積 $= \frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高さ}$
 $= \frac{1}{3} \times 3^2 \times 5$
 $= 15 \text{ (cm}^3\text{)}$

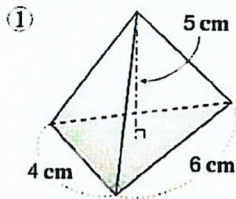
2) 円錐



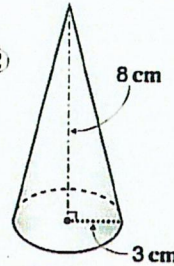
体積 $= \frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高さ}$
 $= \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 6$
 $= 8\pi \text{ (cm}^3\text{)}$

トライ (5)

下の図の角錐・円錐の体積を求めなさい。



$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times 5 = 20 \text{ cm}^3$



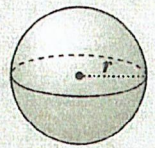
$\frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 8 = 24\pi \text{ cm}^3$

ステップ 5 球の表面積と体積

ポイント

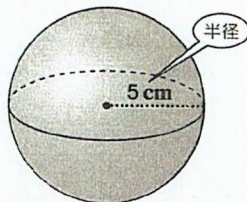
球の半径を r 、その表面積を S 、体積を V とすると、

$S = 4\pi r^2$ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$



基本パターン (6)

▼ 下の図の球の表面積と体積を求めなさい。



• 表面積 $= 4\pi \times 5^2 = 100\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

• 体積 $= \frac{4}{3}\pi \times 5^3 = \frac{500}{3}\pi \text{ (cm}^3\text{)}$



球の公式の覚え方

・表面積 ... 心配のある事情
 $4\pi r^2$ 乗

・体積 ... 身の上に心配ある参上
 $\frac{4}{3}\pi r^3$ 乗

トライ (6)

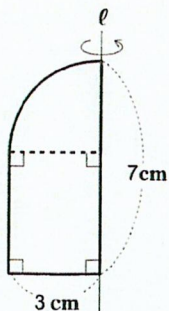
半径 3 cm の球の表面積と体積を求めなさい。

表面積 $= 4\pi \times 3^2$
 $= 36\pi$
 体積 $= \frac{4}{3}\pi \times 3^3$
 $= 36\pi$

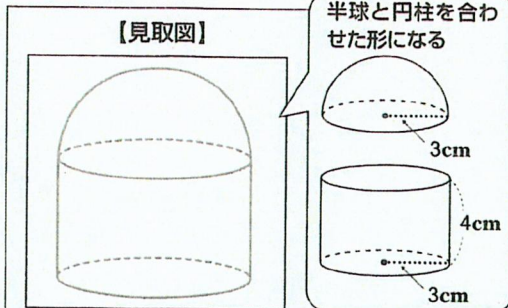
ステップ 6 いろいろな立体の体積

発展学習

▼ 下の図のような平面図形を、直線 l を軸として 1 回転させてできる立体について、見取図をかいてみよう。



【見取図】



半球と円柱を合わせた形になる

トライ (7)

左の発展学習でできた立体の体積を求めなさい。

体積 $= \text{半球} + \text{円柱}$
 $= \left(\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi \times 3^3 \right) + (\pi \times 3^2 \times 4)$
 $= 18\pi + 36\pi = 54\pi$

答え

基本5 ⑦ 5 ⑧ 15 ⑨ 6 ⑩ 8π

基本6 ⑪ 100π ⑫ $\frac{500}{3}\pi$

定期テスト前に必ず復習せよ！

練習問題



たくさん解いて、解き方を工夫したり、問題に慣れよう！

1

次の図の角柱・円柱の表面積を求めなさい。基本1

- ① 142 cm^2
- ② 300 cm^2
- ③ $88\pi \text{ cm}^2$
- ④ $500\pi \text{ cm}^2$
- ⑤ 156 cm^2
- ⑥ 204 cm^2
- ⑦ $50\pi \text{ cm}^2$
- ⑧ 208 cm^2

2

次の図の角柱・円柱の体積を求めなさい。基本2

- ① 180 cm^3
- ② 192 cm^3
- ③ $160\pi \text{ cm}^3$
- ④ $288\pi \text{ cm}^3$
- ⑤ 168 cm^3
- ⑥ 150 cm^3
- ⑦ 180 cm^3
- ⑧ $180\pi \text{ cm}^3$

3

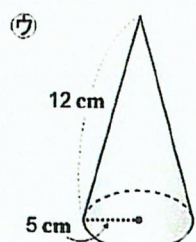
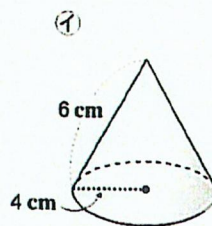
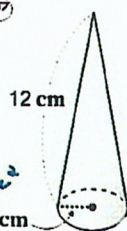
次の図の角錐の表面積を求めなさい。基本3

- ① 105 cm^2
- ② 384 cm^2
- ③ 39 cm^2
- ④ 339 cm^2

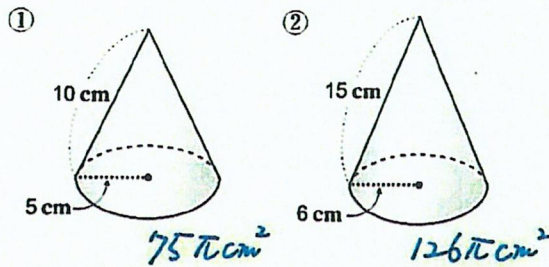
4

右の図の円錐 ㉑, ㉒, ㉓ について、次の問いにそれぞれ答えなさい。基本4

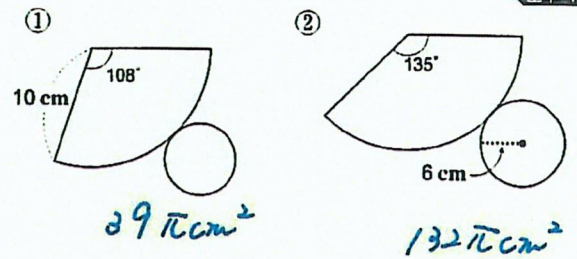
- ① 側面となるおうぎ形の中心角は何度か。
 ㉑ 60° ㉒ 120° ㉓ 150°
- ② 側面積を求めなさい。
 ㉑ $24\pi \text{ cm}^2$ ㉒ $24\pi \text{ cm}^2$ ㉓ $60\pi \text{ cm}^2$
- ③ 表面積を求めなさい。
 ㉑ $28\pi \text{ cm}^2$ ㉒ $40\pi \text{ cm}^2$ ㉓ $85\pi \text{ cm}^2$



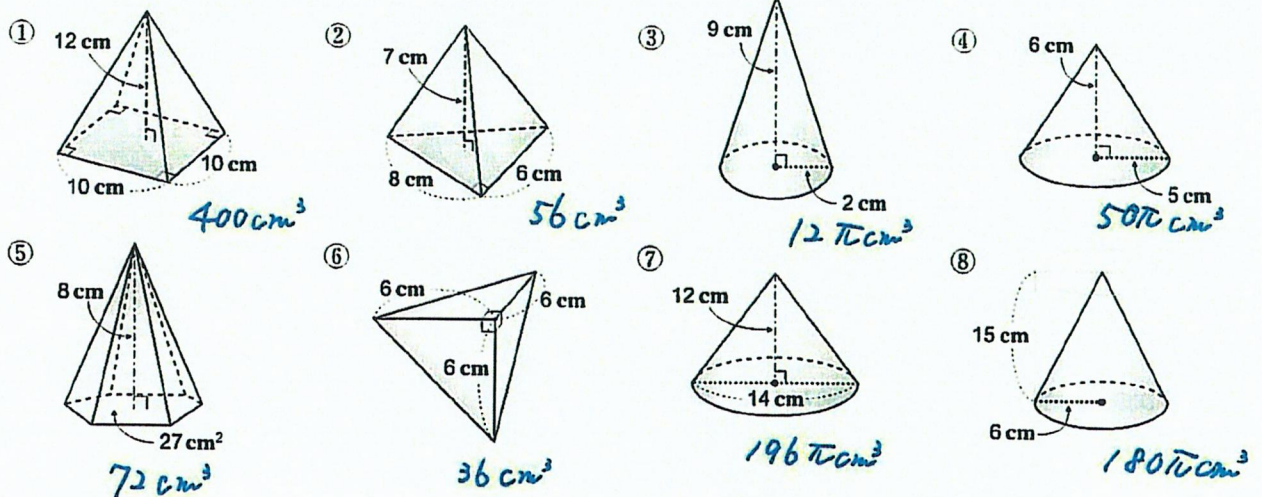
5 次の図の円錐の表面積を求めなさい。 基本4



6 次の展開図で表される円錐の表面積を求めなさい。 基本4

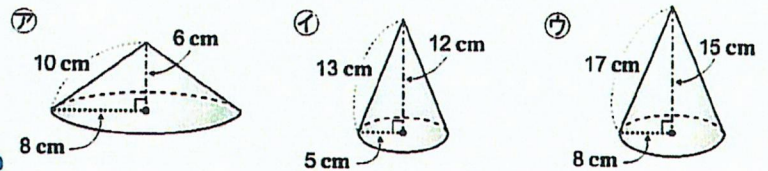


7 次の図の角錐・円錐の体積を求めなさい。 基本5



8 右の図の円錐⑦, ⑧, ⑨について, 次の問いに答えなさい。 ステップ3 4

- ① 表面積をそれぞれ求めなさい。
 ⑦ $144\pi\text{cm}^2$ ⑧ $90\pi\text{cm}^2$ ⑨ $200\pi\text{cm}^2$
- ② 体積をそれぞれ求めなさい。
 ⑦ $128\pi\text{cm}^3$ ⑧ $100\pi\text{cm}^3$ ⑨ $320\pi\text{cm}^3$

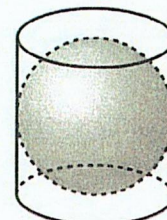


9 半径が次のような球の表面積と体積を求めなさい。 基本6

- ① 半径が 2 cm の球
 (表) 16π (体) $\frac{32}{3}\pi$
- ② 半径が 4 cm の球
 (表) 64π (体) $\frac{256}{3}\pi$
- ③ 半径が 6 cm の球
 (表) 144π (体) 288π
- ④ 半径が 8 cm の球
 (表) 256π (体) $\frac{2048}{3}\pi$
- ⑤ 半径が 9 cm の球
 (表) 324π (体) 972π
- ⑥ 半径が 12 cm の球
 (表) 576π (体) 2304π

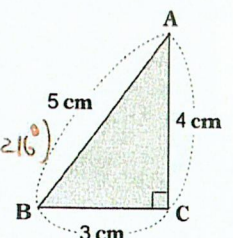
10 半径 10 cm の球と, その球がちょうど入る大きさの円柱がある。このとき, 次の問いに答えなさい。 ステップ5

- ① 球の体積は, 円柱の体積の何倍か。
 球 $= \frac{4000}{3}\pi\text{cm}^3$, 円柱 $= 2000\pi\text{cm}^3$ より, $\frac{4000}{3}\pi \div 2000\pi = \frac{2}{3}$ 倍
- ② 球の表面積と円柱の側面積を比べなさい。
 球 $= 400\pi$, 円柱 $= 400\pi$ より, 等しい

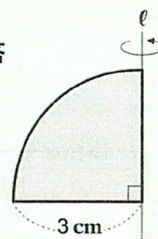


11 右の図のような直角三角形 ABC について, 次の問いに答えなさい。 ステップ6

- ① 辺 AC を軸として 1 回転させてできる立体の体積と表面積をそれぞれ求めなさい。
 (体) $= 12\pi$, (表) $= 24\pi$ (側面積は 15π , 展開図の中心角は 216°)
- ② 辺 BC を軸として 1 回転させてできる立体の体積と表面積をそれぞれ求めなさい。
 (体) $= 16\pi$, (表) $= 36\pi$ (側面積は 20π , 展開図の中心角は 288°)



- 12 右の図のような平面図形を、直線 ℓ を軸として 1 回転させてできる立体について、次の問いに答えなさい。 **ステップ 6**



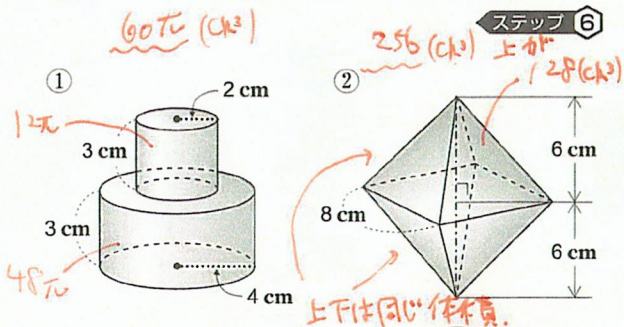
- ① この立体の見取図をかき、どんな立体ができるか答えなさい。
② 立体の体積を求めなさい。
③ 立体の表面積を求めなさい。

① 半球

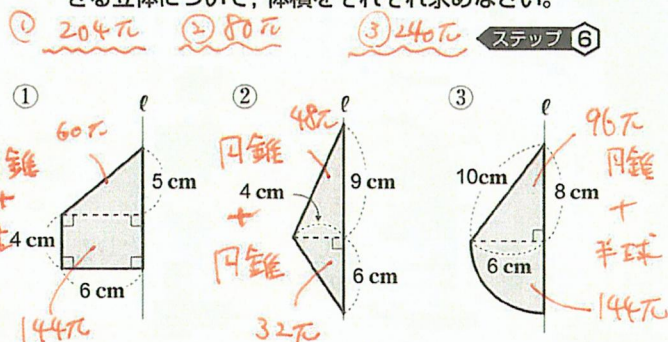
$18\pi \text{ (cm}^3\text{)}$

$27\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

- 13 次の図のように、円柱や正四角錐を組み合わせてできる立体について、体積をそれぞれ求めなさい。



- 14 次の平面図形を、直線 ℓ を軸として 1 回転させてできる立体について、体積をそれぞれ求めなさい。

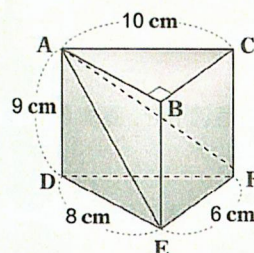


応用問題



さあ、チャレンジしてみよう！あきらめずに最後までトライ！

- 1 右の図の三角柱で、底面の $\triangle ABC$ は $\angle B = 90^\circ$ の直角三角形である。このとき、次の問いに答えなさい。

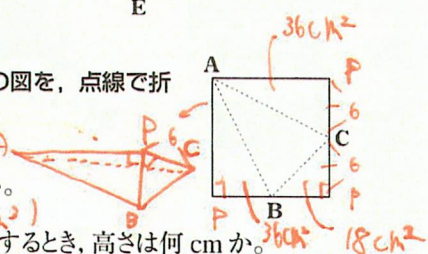


- ① 辺 AB とおなじれ位置にある辺は何本あるか。
② この三角柱の体積を求めなさい。
③ 点 A, D, E, F を頂点とする三角錐 A-DEF の体積を求めなさい。

$72 \text{ (cm}^3\text{)}$

- 2 右の図は、1 辺が 12 cm の正方形で、点 B, C はそれぞれの辺の中点である。この図を、点線で折って組み立てると三角錐ができる。このとき、次の問いに答えなさい。

- ① この三角錐の表面積を求めなさい。
② この三角錐の体積を求めなさい。



- ③ $\triangle ABC$ の面積を求めなさい。

- ④ この三角錐の底面を $\triangle ABC$ とするとき、高さは何 cm か。

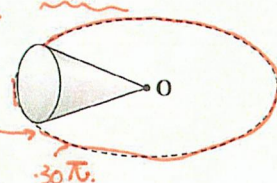
- ⑤ 正方形の対角線の中点を結ぶと、正方形の面積の半分になる。

- 3 右の図のように、底面の半径が 6 cm の円錐を、頂点 O を中心として、すべらないように平面の上をころがすと、円錐はちょうど 2 回半回転してもとの位置にもどった。このとき、次の問いに答えなさい。

- ① この円錐の母線の長さを求めなさい。
② この円錐の表面積を求めなさい。

$30\pi = 2 \times \pi r l, r = 6, l = 15 \text{ cm}$

$26\pi \text{ (cm}^2\text{)}$ (底: 36π , 側: 90π)

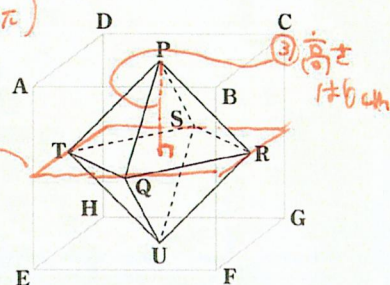


- 4 右の図のように、1 辺 12 cm の立方体の各面の対角線の交点を結んで立体をつくった。このとき、次の問いに答えなさい。

- ① この立体の名前を答えなさい。
② 正方形 QRST の面積を求めなさい。

- ③ この立体の体積を求めなさい。

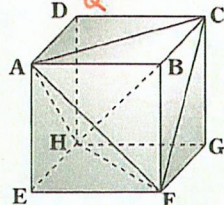
- ④ 正方形 QRST の面積を求めなさい。



- 5 右の図のように、1 辺の長さが 6 cm の立方体がある。4 点 A, C, F, H を頂点とする立体の体積を求めなさい。

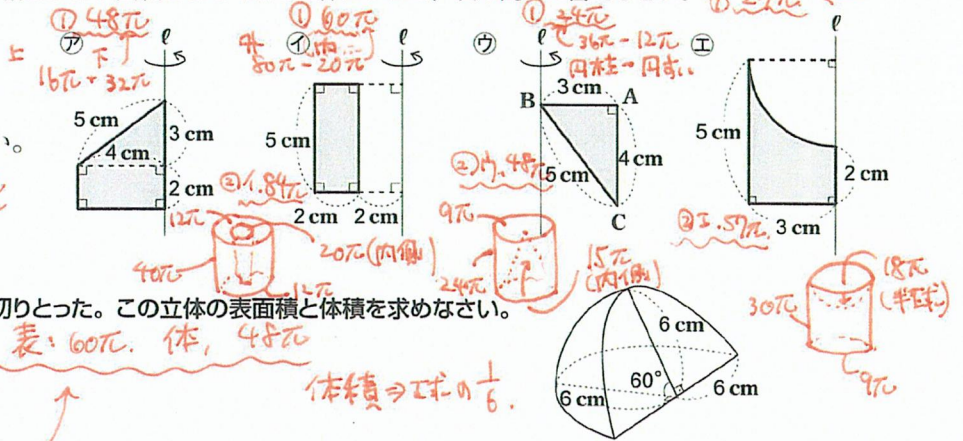
$72 \text{ (cm}^3\text{)}$

立方体 - (4 個の三角錐) = $216 \text{ cm}^3 - 4 \times 36 \text{ cm}^3 = 72 \text{ cm}^3$

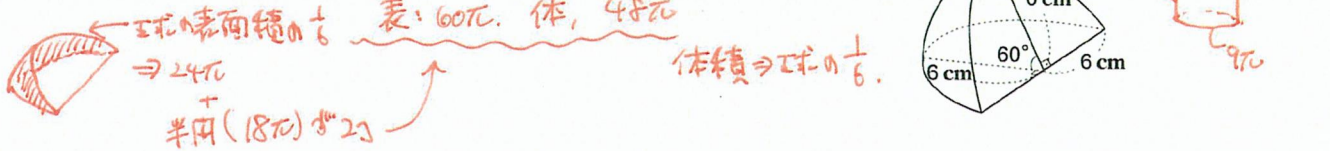


- 6 右の平面図形の①～④を、直線 l を軸として 1 回転させてできる立体について、次の問いに答えなさい。

- ① 体積をそれぞれ求めなさい。
② 表面積をそれぞれ求めなさい。

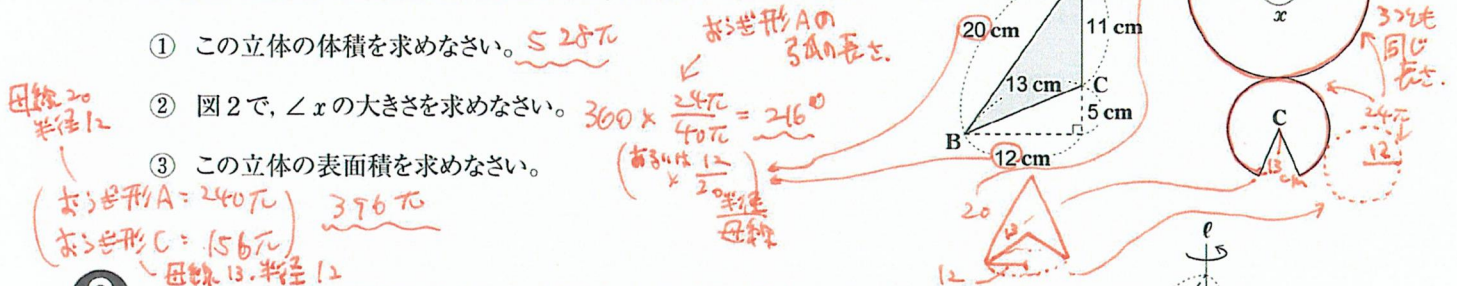


- 7 半径 6 cm の球を右の図のように切りとった。この立体の表面積と体積を求めなさい。



- 8 右の図 1 の $\triangle ABC$ を、辺 AC を軸として 1 回転させて立体をつくった。図 2 は、この立体の展開図である。このとき、次の問いに答えなさい。

- ① この立体の体積を求めなさい。
② 図 2 で、 $\angle x$ の大きさを求めなさい。
③ この立体の表面積を求めなさい。



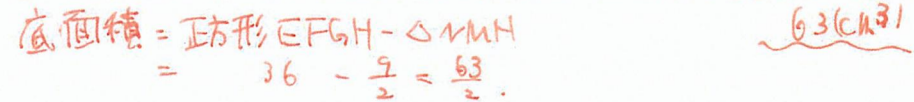
- 9 右の平面図形を、直線 l を軸として 1 回転させてできる立体について、次の問いに答えなさい。

- ① この立体の体積を求めなさい。
② この立体の表面積を求めなさい。

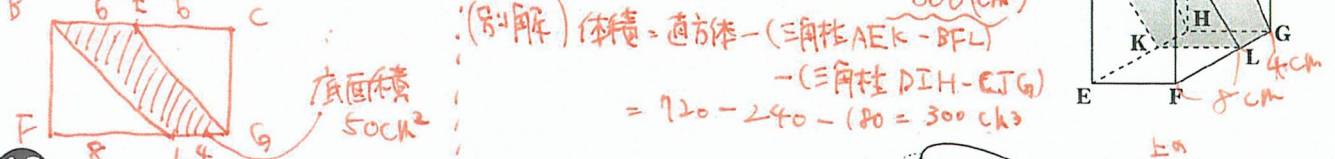


- 10 右の図は、1 辺が 6 cm の立方体で、点 M , N はそれぞれ辺 GH , HE の中点である。このとき、次の問いに答えなさい。

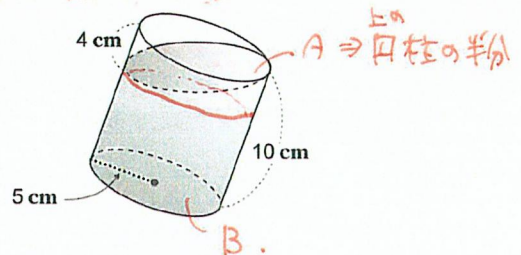
- ① 点 B , E , F , G を結んでできる三角錐 $B-EFG$ の体積を求めなさい。
② 点 B , E , F , G , M , N を結んでできる五角錐 $B-EFGMN$ の体積を求めなさい。



- 11 右の図の直方体で、 I , J はそれぞれ辺 AD , BC の中点、 K , L はそれぞれ辺 EH , FG 上の点で、 $EK=2KH$, $FL=2LG$ である。 $AB=6$ cm, $AD=12$ cm, $AE=10$ cm のとき、 A , B , J , I , K , L , G , H を頂点とする立体の体積を求めなさい。



- 12 底面の半径が 5 cm、高さが 10 cm の円柱の容器に水を入れ、少し傾けたところ、右の図ようになった。このとき、容器に入れた水の体積を求めなさい。



☆ 立体の切断

ジャンプ

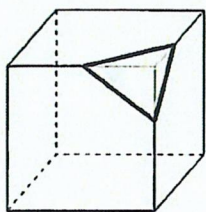
1

立方体の切断

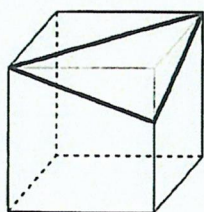
立方体を平面で切るとき、切り方によって、その切り口はいろいろな形になる。

ポイント

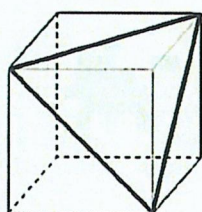
立方体の切断による切り口の形（・印は、各辺の中点を表す。）



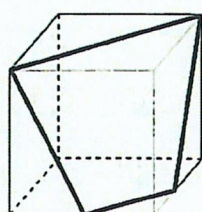
三角形



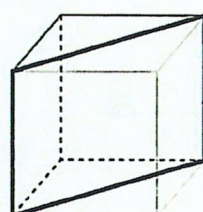
二等辺三角形



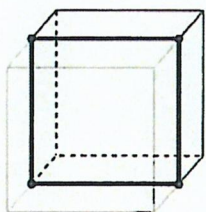
正三角形



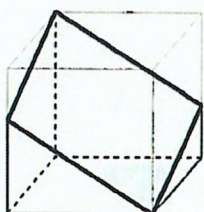
台形



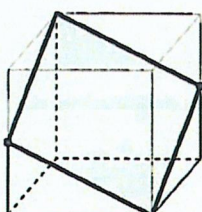
長方形



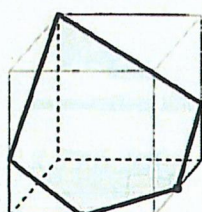
正方形



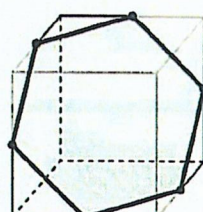
平行四辺形



ひし形



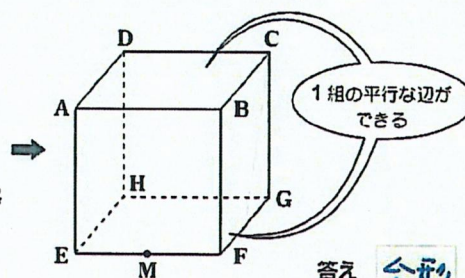
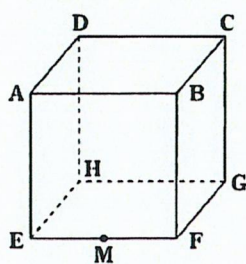
五角形



正六角形

発展パターン 1

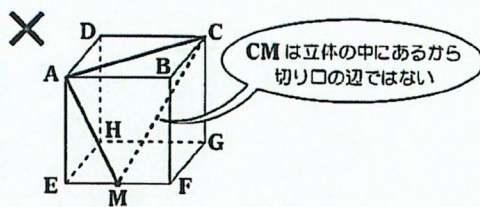
▼ 下の図の立方体を、頂点A、Cと辺EFの中点Mの3点を通る平面で切るとき、その切り口はどんな形になるか。切り口の線をかき入れて、その名前を答えなさい。



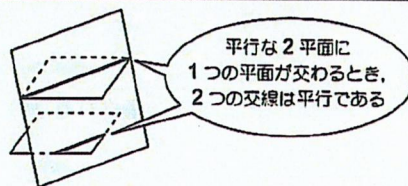
答え **台形**

注意

切り口の辺は立体の中にはできない！



切り口の辺は、必ず立体の面上にできる。



トライ 1

右の図の立方体を、次の①～⑥を通る平面で切ったとき、その切り口はどんな形になるか、それぞれ名前を答えなさい。

① 頂点A、C、Fを通る平面

正三角形

② 頂点A、C、Eを通る平面

長方形

③ 頂点A、Cと辺BFの中点

二等辺三角形

④ 頂点Dと辺EF、FGの中点

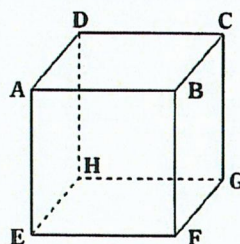
五角形

⑤ 辺ABの中点と頂点E、G

台形

⑥ 辺AD、AE、CDの中点

正六角形



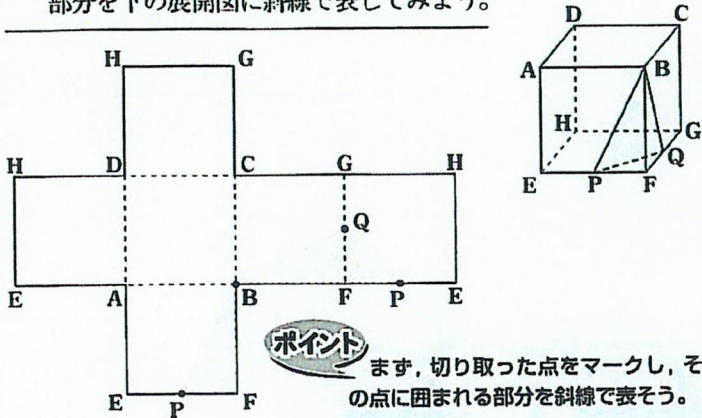
答え

発展 台形

ジャンプ 2 立体の切断と展開図

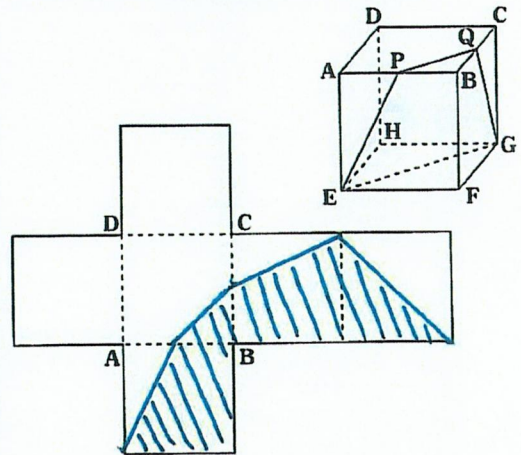
発展学習

▼ 右下の図のように、立方体を頂点Bと辺EF, FGの中点P, Qを通る平面で、三角錐を切り取った。このとき、切り取った部分を下の展開図に斜線で表してみよう。



トライ 2

右下の図のように、立方体を辺AB, BCの中点P, Qと頂点E, Gを通る平面で、手前の立体を切り取った。このとき、切り取った部分を、下の展開図に斜線で表しなさい。



ジャンプ 練習問題

発展内容へジャンプ!

1

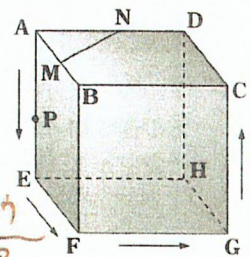
右の図の立方体について、次の問いに答えなさい。 発展1

- ① 点M, Nは、それぞれ辺AB, ADの中点である。また、点Pは辺AE, EF, FG, GC上を、頂点AからCまで動く点である。線分MNと点Pを通る平面でこの立方体を切ったとき、切り口の図形が現れる順序に、次の㊦～㊦を並べかえなさい。

㊦ 三角形 ㊦ 四角形 ㊦ 五角形 ㊦ 六角形

- ② この立方体を、点Bを通る平面で切るとき、その切り口が正三角形になる切り方は何通りあるか。

3通り (B, E, G じつち、B, E, D じつち、B, D, G じつち)



2

右の図1のような立方体を、辺AB, BC, BFの中点を通る平面で、手前の立体を切り取った。このとき、切り取った部分を、図2の展開図に斜線で表しなさい。 ジャンプ 2

図1

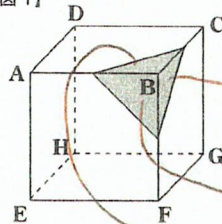
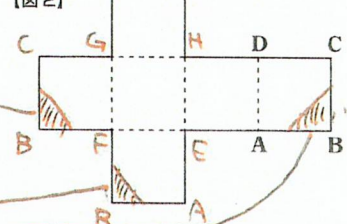


図2



3

右の図1のような立方体を、頂点A, Gと辺AB, BFの中点を通る平面で、手前の立体を切り取った。このとき、切り取った部分を、図2の展開図に斜線で表しなさい。 ジャンプ 2

図1

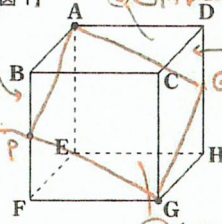
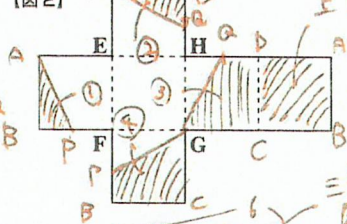


図2



4

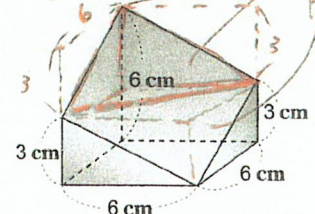
右の図は、1辺6cmの立方体を1つの平面で切ったときにできる立体の1つである。このとき、次の問いに答えなさい。 ジャンプ 1

- ① 切り口の形の名前を答えなさい。

正六角形

- ② この立体の体積を求めなさい。

立方体の半分は、 108 cm^3 になる。 (四角形の1辺は、全2.3cm, 6cmの直角三角形の斜辺)

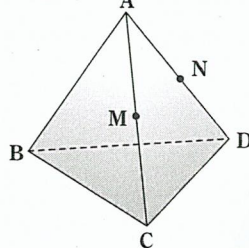




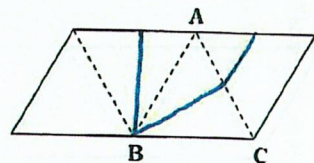
- ① 右の図1の正四面体を、頂点B、辺ACの中点M、辺ADの中点Nの3点を通る平面で切り取った。このとき、次の問いに答えなさい。

- ① 切り口の形の名前を答えなさい。
二等辺三角形
② 切り口の線分を、図2の展開図にかき入れなさい。

【図1】



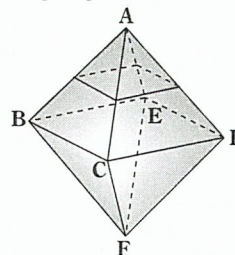
【図2】



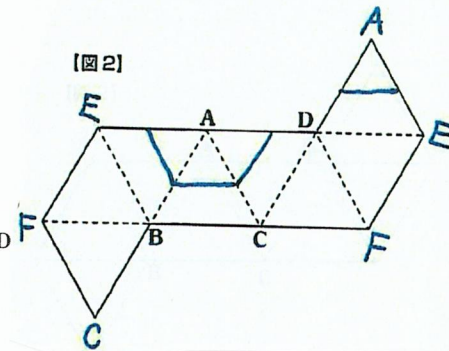
- ② 右の図1の正八面体について、次の問いに答えなさい。

- ① 図2は、この正八面体の展開図を表している。図2に残りの頂点をかき入れなさい。
② 正八面体を、辺AB, AC, AD, AEの中点を通る平面で切り取るとき、その切り口の線分を、図2にかき入れなさい。

【図1】



【図2】



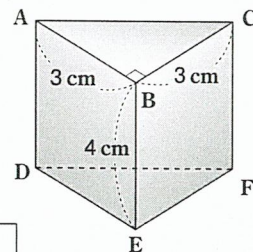
- ③ 右の図のような三角柱を、辺ACをふくむ平面で切り取って、2つの立体に分ける。このとき、次の問いに答えなさい。

- ① 切り口の形は、正三角形の他にどんな形が考えられるか。次の㊦～㊨より2つ選びなさい。

㊦ 直角三角形 ㊧ 二等辺三角形 ㊨ ひし形 ㊩ 台形 ㊪ 長方形

- ② 切り口が正三角形になるとき、点Bを含む立体の体積は、もとの三角柱の体積の何倍か。

$\frac{1}{4}$ 倍

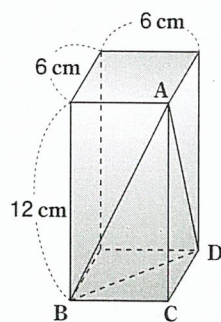
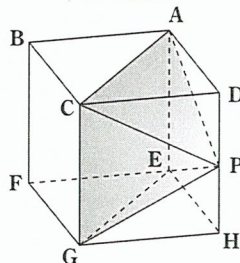


- ④ 右の図の直方体から、頂点A, B, C, Dでできた三角錐A-BCDと、形も大きさも同じ立体を最も多く切り取り、残った立体をXとする。ただし、切り取る立体の各頂点は、この直方体の頂点と重なるものとする。このとき、次の問いに答えなさい。

- ① 三角錐A-BCDをふくめて、三角錐A-BCDと形も大きさも同じ立体を何個切り取ったか。
② 立体Xの体積を求めなさい。

4個

144cm^3



- ⑤ 右の図は、1辺6 cmの立方体で、Pは辺DH上の点である。このとき、四角錐P-ACGEの体積を求めなさい。

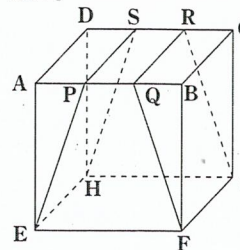
72cm^3

- ⑥ 右の図1は、1辺6 cmの立方体である。また、辺ABを3等分する点をP, Q、辺CDを3等分する点をR, Sとする。図2のように、この立方体を2平面PEHS, QFGRで切り取ってできる立体について、次の問いに答えなさい。

- ① この立体の体積を求めなさい。
② この立体を、3点S, R, Eを通る平面で切り取るとき、点Gを含む方の立体の体積を求めなさい。

84cm^3

【図1】



【図2】

