証明問題は、答えが問題に書いてあります。何を答えればいいかを明確にしましょう。

5．図形と証明

ステップ① 仮定(かてい)と結論(けつろん)

あることがらが，「　　　ならば，□□であある。」という形で表されるとき，　　の部分を仮定，□□の部分を結論という。

ポイント 「　　　ならば，□□である。」（仮定）（結論）

参考 「　　ならば，～」は「　　のとき，～」と書くこともある。

基本パターン①

▼ 次のことがらの仮定と結論を書きなさい。

1）△ABC≡△DEF ならば，∠A＝∠D である。

仮定 ㋐ △ABC≡△DEF ，結論 ㋑ ∠A＝∠D

2）三角形の内角の和は 180°である。

「　　ならば，□□である。」の形に書きかえよう

⇒ 三角形 ならば，内角の和は 180° である。

仮定 ㋒ 三角形 ，結論 ㋓ 内角の和は180°

トライ① 次のことがらの仮定と結論を書きなさい。

① △ABC≡△DEF ならば，AB＝DE である。

仮定 △ABC≡△DEF

結論 AB＝DE

② 6の倍数は偶数である。

仮定 6の倍数

結論 偶数

ステップ② 定理(ていり)と証明(しょうめい)

すでに成り立つことがわかっていることがら

⑪ あることがらが成り立つわけを，それまでに学んだ性質を根拠にして示すことを証明という。

⑫ それまでに学んだ性質で証明されたことがらのうち，証明の根拠によく使われる重要なものを定理という。

ポイント 定理と証明

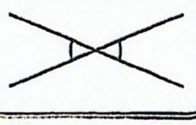
【仮定】―― 証明 ――→【結論】

与えられたヒント（仮定）をもとにして，理由（根拠）をはっきりと書き，知りたいことがら（結論）を導くこと

基本学習 ―― 証明の根拠によく使われる定理

対頂角の性質

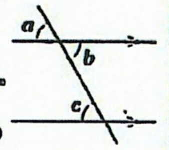
ⓐ 対頂角は等しい。



平行線の性質

ⓑ 2直線が平行ならば，同位角や㋐ 錯角 は等しい。

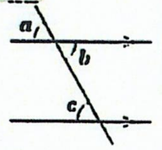
∠a＝∠c　∠b＝∠c



平行線になるための条件

∠a＝∠c　∠b＝∠c

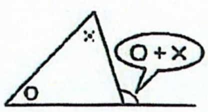
ⓒ ㋑ 同位角 か錯角が等しければ，2直線は平行である。



三角形の内角・外角の性質

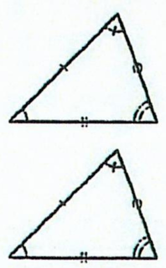
ⓓ 三角形の内角の和は㋒ 180 °である。

ⓔ 三角形の1つの外角は，それととなり合わない2つの内角の和に等しい。



合同な図形の性質

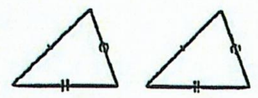
ⓕ 合同な図形の対応する辺の長さや角の大きさは等しい。



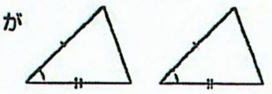
三角形の合同条件

2つの三角形は，次の条件のいずれかが成り立てば合同である。

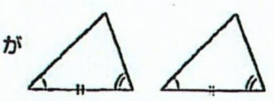
ⓖ ㋓ 3辺 がそれぞれ等しい。



ⓗ 2組の辺と㋔ その間の角 がそれぞれ等しい。



ⓘ 1組の辺と㋕ その両端の角 がそれぞれ等しい。



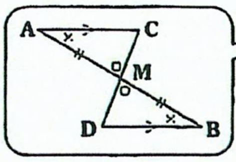
答え 基本1 ㋐△ABC≡△DEF ㋑∠A＝∠D ㋒三角形 ㋓内角の和は180° 基本学習 ㋐錯角 ㋑同位角 ㋒180 ㋓3辺 ㋔その間の角 ㋕その両端の角

トライ ② 右下の図で，AC∥DB，点 M は AB の中点 ならば，MC＝MD であることを次のように証明した。
証明の根拠となることがらを，前ページの基本学習 ⓐ～ⓘ より選び，〔　〕に記号を書きなさい。

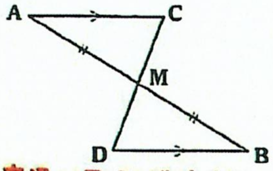
アルファベットも対応させること！

なぜ等しいのか？なぜ合同になるのか？その理由のこと

【証明】 △MAC と △MBD において



MA＝MB ……………………………… 仮定
∠AMC＝∠BMD ……………………… ㋐〔 a 〕
∠MAC＝∠MBD ……………………… ㋑〔 b 〕
したがって，△MAC ≡ △MBD ………… ㋒〔 i 〕
これより，MC＝MD ………………… ㋓〔 f 〕



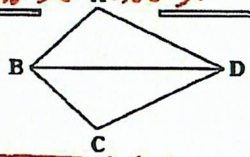
左辺と右辺のアルファベットが対応していないと，減点されます

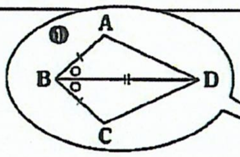
ステップ ③ 三角形の合同の証明

線分の長さや角の大きさが等しいことを証明するときには，三角形の合同を根拠として使う場合が多い。

基本パターン ② 書き方を覚えさせましょう。省略せずにきちんと書くことが大切です。

▼ 右の図で，AB＝CB，BD は∠ABC の二等分線 のとき，△ABD ≡ △CBD であることを証明しなさい。





【証明】② △ABD と △CBD において → タイトル

③
仮定より，AB＝㋐ CB …①
∠ABD＝∠㋑ CBD …②
共通な辺だから，BD＝BD …③
→ 理由

①，②，③より，㋒ 2組の辺とその間の角 がそれぞれ等しいから → 合同条件
④
△ABD ≡ △㋓ CBD → 結論
⑤

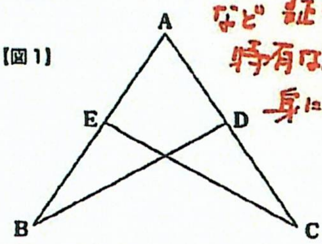
ポイント 三角形の合同の証明の進め方

1. ① 等しい辺や角には，図の中に同じ印をつける。
2. ② 証明したい２つの三角形を示す。
3. ③ 等しい辺や角を式で表し，その理由（根拠）を書く。
4. ④ 三角形の合同条件を書く。← これが必須。
5. ⑤ 結論を書く。

トライ ③ 右の図１で，AB＝AC，∠ABD＝∠ACE ならば，BD＝CE である。
これについて，次の問いに答えなさい。

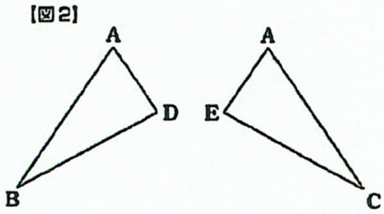
「～より」「～から」「よって～」など 証明問題特有な表現を身につけよう！

【図１】



↓

【図２】



① 仮定と結論を書きなさい。

仮定 AB＝AC ∠ABD＝∠ACE 結論 BD＝CE

② 右の図２の中に，等しい辺や角を見つけ，同じ印をつけなさい。

③ このことを証明しなさい。

【証明】 △ABD と △㋐ ACE において

仮定より，AB＝㋑ AC …①
∠ABD＝∠㋒ ACE …②
共通な角だから，∠BAD＝∠㋓ CAE …③

①，②，③より，㋔ 1組の辺とその両端の角 がそれぞれ等しいから，△ABD ≡ △㋕ ACE

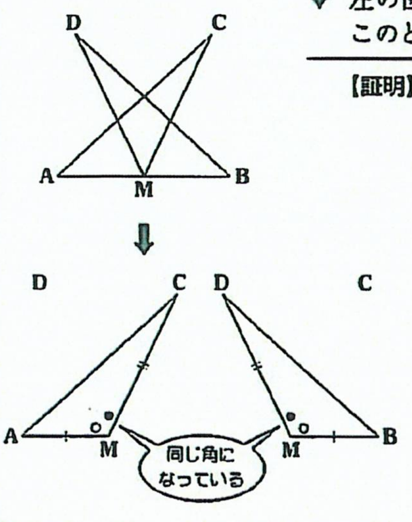
したがって，合同な図形の対応する ㋖ 辺 の長さは等しいから，BD＝㋗ CE

答え 基本2 ㋐ CB ㋑ CBD ㋒ 2組の辺とその間の角 ㋓ CBD

まずは書き方をきちんと身につけさせましょう。

発展パターン 1

▼ 左の図で，点 M は線分 AB の中点で，∠AMD＝∠BMC，MC＝MD である。このとき，△AMC ≡ △BMD であることを証明しなさい。



【証明】 △AMC と△BMD において，

仮定より，AM＝㋐ BM …①，MC＝㋑ MD …②

また，∠AMC＝∠AMD＋∠DMC

∠BMD＝∠BMC＋∠㋒ DMC

仮定より，∠AMD＝∠BMC だから，

∠AMC＝∠㋓ BMD …③

①，②，③より，㋔ 2組の辺とその間の角 がそれぞれ等しいから，

△AMC ≡ △BMD

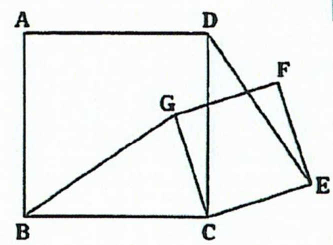
ポイント どちらも同じ大きさの角をたしていることを表している。 ○＋●

トライ 4

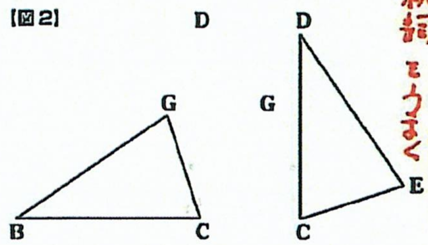
下の図のように，正方形 ABCD と正方形 CEFG がある。このとき，∠CBG＝∠CDE である。図２の中に，等しい辺や角に同じ印をつけ，△BCG ≡ △DCE となることを利用して，このことを証明しなさい。

正方形の４つの辺は等しく，１つの角は 90° である

【図１】



【図２】



【証明】 △BCG と△㋐ DCE において，

仮定より，２つの正方形の４辺はそれぞれ等しいから，

BC＝㋑ DC …①，CG＝㋒ CE …②

また，正方形の１つの角は 90° だから，

∠BCG＝∠BCD－∠GCD＝90°－∠GCD

∠DCE＝∠GCE－∠GCD＝㋓ 90°－∠GCD

よって，∠BCG＝∠㋔ DCE …③

①，②，③より，㋕ 2組の辺とその間の角 がそれぞれ等しいから，

△BCG ≡ △㋖ DCE

したがって，合同な図形の対応する㋗ 角 の大きさは等しいから，

∠CBG＝∠㋘ CDE

接続詞をうまく使おう

答え 発展1 ㋐ BM ㋑ MD ㋒ DMC ㋓ BMD ㋔ 2組の辺とその間の角

練習問題

たくさん解いて，解き方を工夫したり，問題に慣れよう！

1 次のことがらの仮定と結論を書きなさい。 基本1

① △ABC ≡ △PQR ならば，∠A＝∠P である。（仮定：△ABC ≡ △PQR　結論：∠A＝∠P）

② x が 6 の倍数ならば，x は 3 の倍数である。（仮定：x が 6 の倍数　結論：x は 3 の倍数）

③ $a=b$，$b=c$ のとき，$a=c$ である。（仮定：$a=b$，$b=c$　結論：$a=c$）

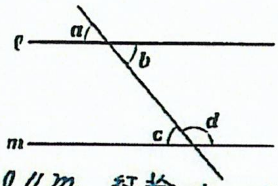
④ $\ell /\!/ m$，$m /\!/ n$ であるとき，$\ell /\!/ n$ である。（仮定：$\ell /\!/ m$，$m /\!/ n$　結論：$\ell /\!/ n$）

⑤ 正三角形の３つの角は等しい。（仮定：正三角形　結論：3つの角は等しい）

⑥ 合同な三角形は面積が等しい。（仮定：合同な三角形　結論：面積が等しい）

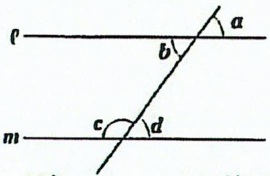
2 次のことがらの仮定と結論を，図の中の記号を使って，式で表しなさい。 ステップ1

① 2直線が平行ならば，錯角は等しい。



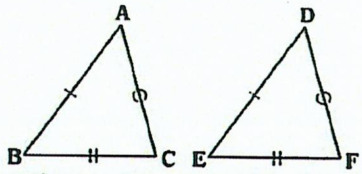
仮定 $\ell /\!/ m$ 結論 $\angle b = \angle c$

② 同位角が等しいとき，2直線は平行である。



仮定 $\angle a = \angle d$ 結論 $\ell /\!/ m$

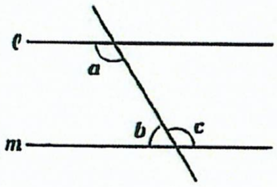
③ 3辺がそれぞれ等しい2つの三角形は合同である。



仮定 $AB = DE$，$BC = EF$，$AC = DF$ 結論 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

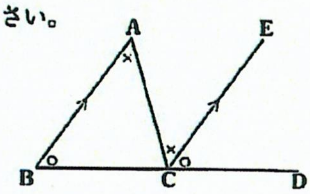
3 次の証明において，その根拠となることがらを，下のⓐ～ⓘよりそれぞれ選び，〔 〕に記号を書きなさい。 ステップ2

① 下の図で，$\ell /\!/ m$ ならば，$\angle a + \angle b = 180°$ であることを証明しなさい。



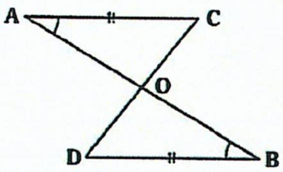
【証明】$\ell /\!/ m$ より，$\angle a = \angle c$ …㋐〔 e 〕
また，　$\angle b + \angle c = 180°$
よって，　$\angle a + \angle b = 180°$

② 下の図で，△ABC の外角∠ACD は，それととなり合わない2つの内角の和に等しいことを，AB∥EC を利用して証明しなさい。



【証明】AB∥EC より，∠ABC = ∠ECD …㋐〔 d 〕
∠BAC = ∠ACE …㋑〔 e 〕
よって，∠ACD = ∠ABC + ∠BAC

③ 下の図で，∠A = ∠B，AC = BD ならば，OC = OD であることを証明しなさい。

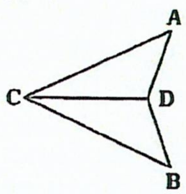


【証明】△OAC と△OBD において，
AC = BD ……㋐〔 a 〕
∠OAC = ∠OBD ……㋑〔 a 〕
これにより，AC∥DB ……㋒〔 f 〕
よって，∠OCA = ∠ODB ……㋓〔 e 〕
したがって，△OAC ≡ △OBD ……㋔〔 i 〕
これより，OC = OD ……㋕〔 g 〕

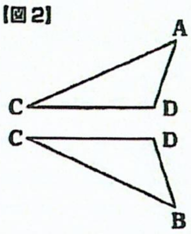
ⓐ 仮定　ⓑ 結論　ⓒ 対頂角は等しい。　ⓓ 平行線の同位角は等しい。
ⓔ 平行線の錯角は等しい。　ⓕ 同位角や錯角が等しければ，2直線は平行である。
ⓖ 合同な図形の対応する線分の長さは等しい。　ⓗ 3組の辺がそれぞれ等しい2つの三角形は合同である。
ⓘ 1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい2つの三角形は合同である。

4 下の図1で，AC = BC，AD = BD であるとき，△ACD ≡ △BCD であることを証明しなさい。(図2の中に，等しい辺や角に同じ印をつけて考えなさい。) 基本2

【図1】



【図2】

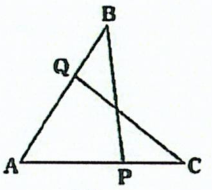


【証明】
△ACD と△㋐ BCD において，
仮定より，AC = ㋑ BC …①
AD = ㋒ BD …②
共通な辺だから，CD = ㋓ CD …③
①，②，③より，㋔ 3辺 がそれぞれ等しいから，
△ACD ≡ △㋕ BCD

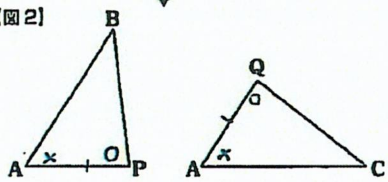
図形をよく見て、合同条件にあてはまるように考えましょう。

5 下の図 1 で、AP＝AQ，∠APB＝∠AQC ならば，AB＝AC であることを証明しなさい。(図2の中に，等しい辺や角に同じ印をつけて考えなさい。) 基本2

【図1】



【図2】



【証明】△ABP と△ACQ において，

仮定より，　㋐ AP ＝ ㋑ AQ　…①

∠㋒ APB ＝∠㋓ AQC　…②

共通な角だから，∠BAP＝∠㋔ CAQ　…③

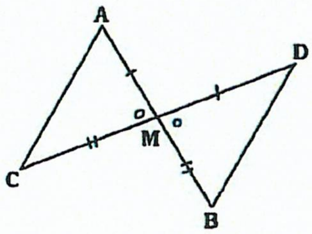
①，②，③より，㋕ 1組の辺とその両端の角 がそれぞれ等しいから，

△ABP ≡ △ACQ

したがって，合同な図形の㋖ 対応する辺の長さ は等しいから，

AB＝㋗ AC

6 下の図で，点 M が線分 AB，CD の中点であるとき，AC∥DB であることを証明しなさい。(図の中に，等しい辺や角に同じ印をつけて考えなさい。) ステップ3



【証明】△ACM と△㋐ BDM において，

仮定より，　㋑ AM ＝ ㋒ BM　…①

㋓ CM ＝ ㋔ DM　…②

㋕ 対頂 角は等しいから，

∠㋖ AMC ＝∠㋗ BMD　…③

①，②，③より，㋘ 2組の辺とその間の角 がそれぞれ等しいから，

△ACM ≡ △㋙ BDM

したがって，合同な図形の㋚ 対応する角の大きさ は等しいから，

∠MAC＝∠㋛ MBD

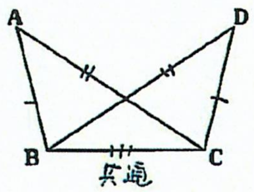
よって，㋜ 錯 角が等しいから，AC∥㋝ DB

7 右の図で，AB＝DC，AC＝DB ならば，△ABC ≡ △DCB である。このとき，次の問いに答えなさい。 基本2

① 仮定と結論を書きなさい。　② このことを証明しなさい。

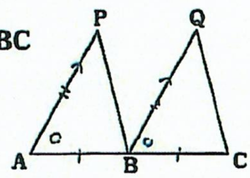
仮定AB＝DC, AC＝DB 結論△ABC≡△DCB

右図参照



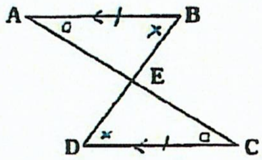
8 右の図で，点 B は線分 AC の中点で，PA＝QB，PA∥QB ならば，△PAB ≡ △QBC であることを証明しなさい。 基本2

右図参照



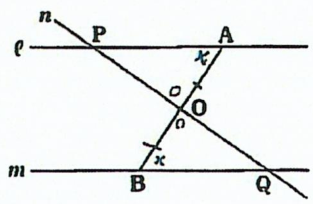
9 右の図で，AB＝CD，AB∥DC のとき，△EAB ≡ △ECD であることを証明しなさい。 基本2

右図参照

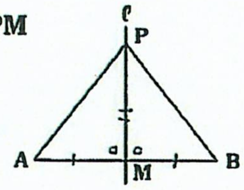


10 右の図のように，平行な 2 直線 ℓ，m がある。ℓ 上の点 A と m 上の点 B を結ぶ線分 AB の中点を O とする。点 O を通る直線 n が，ℓ，m と交わる点をそれぞれ P，Q とするとき，△OAP ≡ △OBQ であることを証明しなさい。 基本2

右図参照



11 右の図で，線分 AB の垂直二等分線 ℓ 上の点を P とするとき，∠APM＝∠BPM である。このとき，次の問いに答えなさい。 基本2



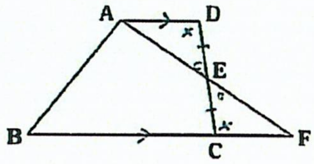
① 仮定と結論を式で表しなさい。　　② このことを証明しなさい。

仮定 AM = BM , PM⊥AB

結論 ∠APM = ∠BPM

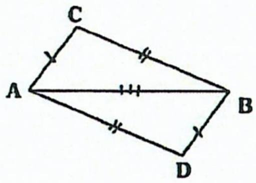
右図参照

12 右の図のように，AD∥BC である台形 ABCD の辺 DC の中点を E とする。また，AE の延長と辺 BC の延長との交点を F とするとき，AD＝FC であることを証明しなさい。 基本2



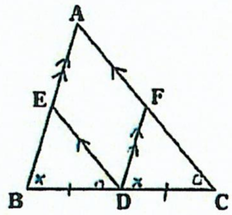
右図参照

13 右の図で，AC＝BD，AD＝BC ならば，AC∥DB であることを証明しなさい。 ステップ③



右図参照

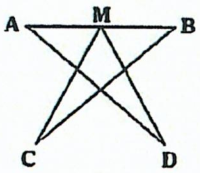
14 右の図の△ABC で，辺 BC の中点を D とする。D を通り辺 AC に平行な直線と辺 AB との交点を E とし，D を通り辺 AB に平行な直線と辺 AC との交点を F とする。このとき，△EBD≡△FDC であることを証明しなさい。 ステップ③



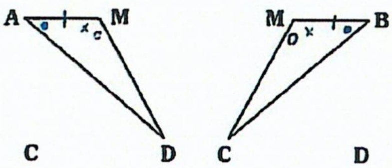
右図参照

15 下の図1で，点 M は線分 AB の中点，∠A＝∠B，∠AMC＝∠BMD である。このとき，△AMD≡△BMC であることを証明しなさい。(図2の中に，等しい辺や角に同じ印をつけて考えなさい。) 発展1

【図1】



【図2】



【証明】△AMD と△BMC において，

仮定より，AM＝㋐ BM …①

∠MAD＝∠㋑ MBC …②

また，∠AMD＝∠AMC＋∠㋒ CMD

∠BMC＝∠BMD＋∠㋓ CMD

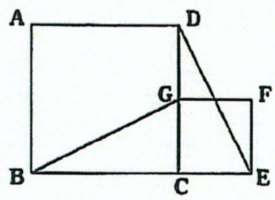
仮定より，∠AMC＝∠㋔ BMD だから，

∠AMD＝∠㋕ BMC …③

①，②，③より，㋖ 1組の辺とその両端の角 がそれぞれ等しいから，

△AMD≡△㋗ BMC

16 右の図のように，正方形 ABCD の辺 CD と正方形 GCEF の辺 CG が接している。このとき，△BCG≡△DCE であることを証明しなさい。 ステップ③



△BCG と△DCE において

仮定より 2つの正方形の4辺は

それぞれ等しいので，

BC = DC …①

CG = CE …②

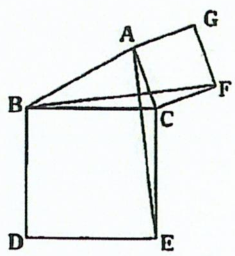
また 正方形の1つの角は90°なので

∠BCG = ∠DCE = 90° …③

①②③ より2組の辺とその間の角がそれぞれ

等しいので △BCG ≡ △DCE

17 右の図の△ABC で，辺 BC，AC をそれぞれ1辺とする正方形 BDEC，正方形 ACFG を，△ABC の外側につくる。このとき，△ACE≡△FCB であることを証明しなさい。 発展1



△ACE と△FCB において

仮定より，2つの正方形の4辺は

それぞれ等しいので

AC = FC …①

CE = CB …②

また 正方形の1つの角は

90°だから

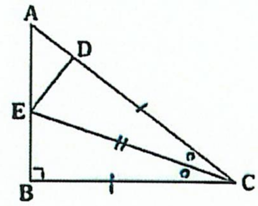
∠ACE = ∠ACB + ∠BCE = ∠ACB + 90°

∠FCB = ∠ACB + ∠ACF = ∠ACB + 90°

よって ∠ACE = ∠FCB …③

①②③ より2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので △ACE ≡ △FCB

18 右の図のように，∠B＝90°の直角三角形 ABC がある。この直角三角形の辺 AC 上に，BC＝DC となるような点 D をとり，∠ACB の二等分線と辺 AB との交点を E とする。このとき，次の問いに答えなさい。 いろいろな証明

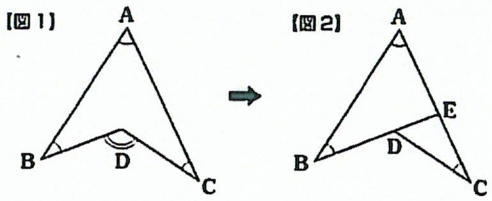


① △BEC ≡ △DEC であることを証明しなさい。 右図参照

② ∠ACB＝40°のとき，∠DEC の大きさを求めなさい。

70°

19 下の図 1 で，∠BDC＝∠A＋∠B＋∠C が成り立つ。図 2 のように，BD の延長と AC との交点を E として，このことを証明しなさい。 いろいろな証明



【証明】△ABE において，

三角形の 1 つの㋐ 外角 は，それととなり合わない 2 つの㋑ 内角 の和に等しいから，

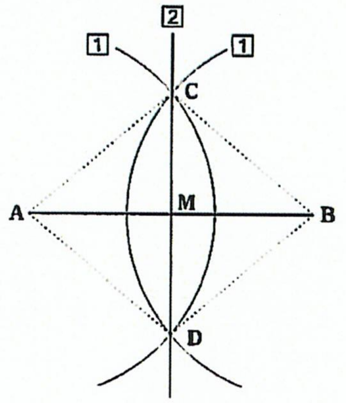
∠BEC＝∠A＋∠㋒ B …①

同様に，△CDE において，

∠BDC＝∠BEC＋∠㋓ C …②

①，②より，∠BDC＝∠A＋∠B＋∠㋔ C

20 下の図は，線分 AB の垂直二等分線 CD を作図する手順を示したものである。この作図が正しいことを証明しなさい。 いろいろな証明



【証明】△ACD と△BCD において，

仮定より，AC＝㋐ BC …①，AD＝㋑ BD …②

共通な辺だから，CD＝㋒ CD …③

①，②，③より，㋓ 3辺 がそれぞれ等しいから，

△ACD ≡ △㋔ BCD

合同な図形の対応する㋕ 角の大きさ は等しいから，

∠ACD＝∠㋖ BCD …④

次に，△ACM と△㋗ BCM において，

共通な辺だから，CM＝㋘ CM …⑤

①，④，⑤より，㋙ 2辺とその間の角 がそれぞれ等しいから，

△ACM ≡ △㋚ BCM

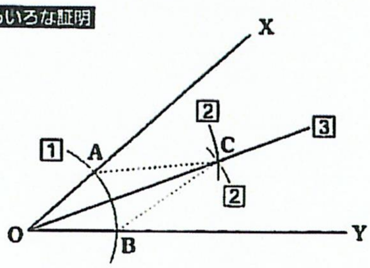
合同な図形の対応する㋛ 辺の長さや角の大きさ は等しいから，

AM＝BM …⑥，∠AMC＝∠㋜ BMC

また，∠AMC＋∠BMC＝180°より，∠AMC＝㋝ 90 ° …⑦

⑥，⑦より，直線 CD は線分 AB の垂直二等分線である。

21 下の図は，∠XOY の二等分線 OC を作図する手順を示したものである。この作図が正しいことを証明しなさい。 いろいろな証明



【証明】△OAC と△OBC において，

仮定より，OA＝㋐ OB …①，AC＝㋑ BC …②

共通な辺だから，OC＝㋒ OC …③

①，②，③より，㋓ 3辺 がそれぞれ等しいから，

△OAC ≡ △㋔ OBC

合同な図形の対応する㋕ 角の大きさ は等しいから，

∠AOC＝∠㋖ BOC

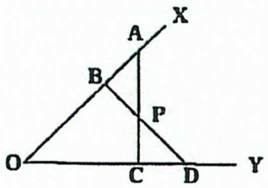
したがって，半直線 OC は∠XOY の二等分線である。

1つ1つのプロセスをよく考えてみよう。問題の中に必ずヒントがあります。

応用問題

さあ、チャレンジしてみよう！あきらめずに最後までトライ！

1 下の図のように，∠XOY の 2 辺 OX，OY 上に 4 点 A，B，C，D がある。線分 AC，BD の交点を P とし，OA＝OD，OB＝OC とする。このとき，AP＝DP であることを証明しなさい。



【証明】

△OAC と△ODB において

仮定より，OA＝(ア) OD …①

OC＝(イ) OB …②

共通な角だから，∠AOC＝∠(ウ) DOB …③

①，②，③より，(エ) 2組の辺とその間の角 がそれぞれ等しいから，△OAC ≡ △ODB …④

次に，△APB と△DPC において，

AB＝OA－OB，DC＝OD－(オ) OC

①，②より，AB＝(カ) DC …⑤

④より，∠PAB＝∠(キ) PDC …⑥

∠OBD＝∠OCA …⑦

また，∠PBA＝180°－∠OBD

∠PCD＝180°－∠(ク) OCA

⑦より，∠PBA＝∠(ケ) PCD …⑧

⑤，⑥，⑧より，(コ) 1組の辺とその両端の角 がそれぞれ等しいから，△APB ≡ △DPC

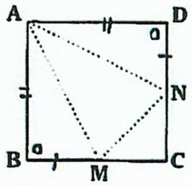
したがって，合同な図形の対応する(サ) 辺の長さ は等しいから，AP＝(シ) DP

2 下の図で，正方形 ABCD の辺 BC，CD の中点を，それぞれ M，N とする。このとき，次の問いに答えなさい。

① △ABM ≡ △ADN であることを証明しなさい。

右図参照

② ∠AMB＝x°とするとき，∠MAN の大きさを x の式で表しなさい。



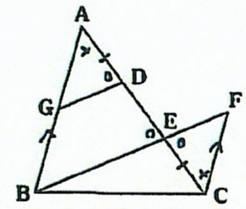
$\angle BAM = 90° - x°$ だから

$\angle MAN = 90° - \angle BAM - \angle DAN$

$= 2x° - 90°$

3 下の図で，AD＝CE，AB∥FC，GD∥BF である。このとき，AG＝CF であることを証明しなさい。

右図参照



やや難だが，解き方を知っておこう！

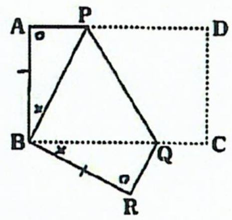
4 下の図のように，長方形 ABCD の紙を，点 D が点 B に重なるように折り返した。折り目を PQ とするとき，次の問いに答えなさい。

① △ABP ≡ △RBQ であることを証明しなさい。

右図参照

② ∠ABP＝40°のとき，∠PQR の大きさを求めなさい。

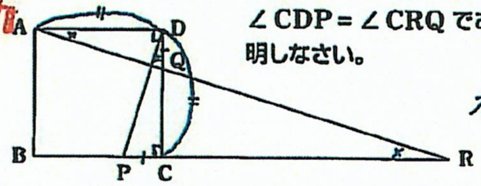
115°



やや難

5 下の図のように，正方形 ABCD の辺 BC，CD 上に点 P，Q をとる。また，AQ の延長と BC の延長との交点を R とする。CP＝DQ のとき，∠CDP＝∠CRQ であることを証明しなさい。

右図参照



やや難

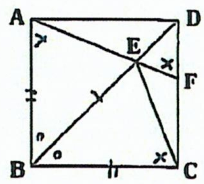
6 下の図のように，正方形 ABCD の対角線 BD 上に点 E をとり，AE の延長と辺 CD との交点を F とする。このとき，次の問いに答えなさい。

① ∠BCE＝∠AFD であることを証明しなさい。

右図参照

② ∠DAF＝24°のとき，∠BEC は何度か。

69°



7 下の図で，四角形 ABCD は正方形であり，点 M は辺 CD の中点である。また，点 E は線分 AC，BM の交点である。このとき，次の問いに答えなさい。

① △ADM ≡ △BCM であることを証明しなさい。

右図参照

② 点 D と点 E を結ぶとき，次のことを証明しなさい。

1) △BCE ≡ △DCE　やや難 2) AM ⊥ DE

省略