

V 図形の性質



■ いろいろな三角形・四角形

次の図形の名前を書きなさい。また、中1で学習したことを思い出し、後の問に答えなさい。



二等辺三角形



正三角形



台形



平行四辺形



ひし形



長方形



正方形

- 線対称な図形をすべて選び、記号㉔～㉔で答えなさい。 答え a, b, e, f, g

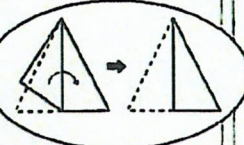
確認 中1で学習した、線対称な図形

1つの直線を折り目にして折ったとき、両側の部分がぴったりと重なり合う図形を線対称な図形といい、折り目にした直線を対称の軸という。

- 二等辺三角形を折り返して重ねてみよう。どんなことがわかるかな。

両側の2つの角がぴったりと重なった。

二等辺三角形は2つの角が等しくなることがわかる。



これから学習する、図形の性質

「2辺が等しい三角形を二等辺三角形という」などのように、ことばの意味をはっきり述べたものを定義という。また、「二等辺三角形は2つの角が等しくなる」などのように、証明されたことがらのうちで、基本となる図形の性質のことを定理という。定理は図形の証明をするときの根拠としてよく使われる。

1. 二等辺三角形

ステップ 1 二等辺三角形の性質

二等辺三角形で

長さの等しい2辺の間の角を頂角、

頂角に向かい合う辺を底辺、

底辺の両端の角を底角という。

二等辺三角形



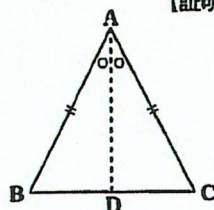
【定義】 2辺が等しい三角形を二等辺三角形という。

【定理】 ① 二等辺三角形の2つの底角は等しい。

② 二等辺三角形の頂角の二等分線は、底辺を垂直に2等分する

基本学習

▼ ポイントの【定理】①を証明しなさい。



【証明】 $AB = AC$ である二等辺三角形 ABC で、頂角 $\angle A$ の二等分線と底辺 BC との交点を D とする。このとき、 $\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ において、

$$\begin{cases} \text{仮定より、} AB = AC & \dots \text{①、} \angle BAD = \angle CAD & \dots \text{②} \\ \text{共通な辺だから、} AD = AD & \dots \text{③} \end{cases}$$

①、②、③より、2組の辺とその間の角 がそれぞれ等しいから、 $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$

よって、対応する角の大きさは等しいから、 $\angle B = \angle C$

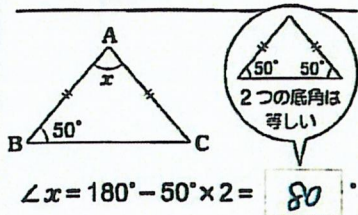
答え わかるかな? ㉔ 正三角形 ㉔ 台形 ㉔ 平行四辺形 ㉔ ひし形 ㉔ 長方形 ㉔ 正方形

㉔ ㉔、㉔、㉔、㉔、㉔

㉔ 2組の辺とその間の角

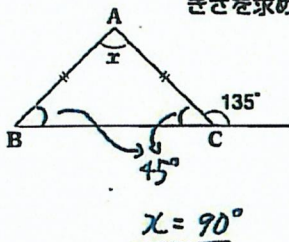
基本パターン①

▼ 下の図で、 $\angle x$ の大きさを求めなさい。



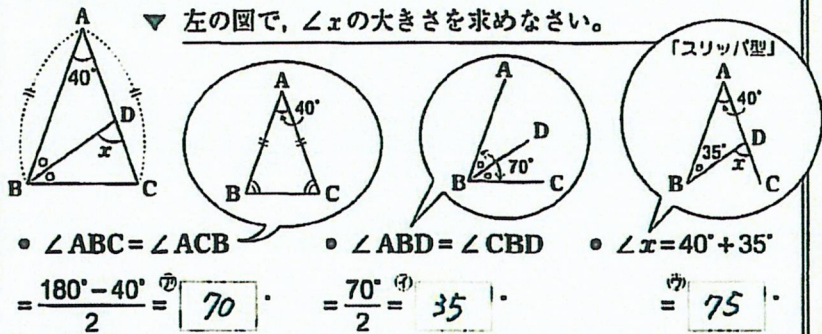
ドライ①

下の図で、 $\angle x$ の大きさを求めなさい。



発展パターン①

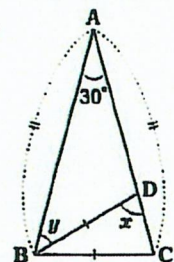
▼ 左の図で、 $\angle x$ の大きさを求めなさい。



ドライ②

右の図で、 $\angle x$, $\angle y$ の大きさを求めなさい。

$$\begin{aligned} \angle BDC &= \angle ACB \text{ から} \\ \angle ACB &= (180^\circ - 30^\circ) \div 2 = 75^\circ \dots \angle x \\ \angle y &= \angle x - 30^\circ \\ &= 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ \dots \angle y \end{aligned}$$

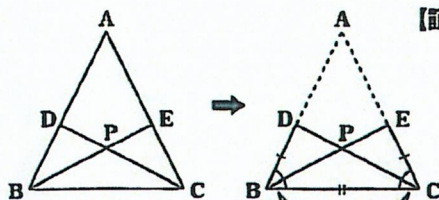


ステップ②

二等辺三角形になるための条件

基本パターン②

▼ 下の図のように、 $AB = AC$ である二等辺三角形ABCがある。BD = CEのとき、 $\triangle PBC$ は二等辺三角形であることを証明しなさい。

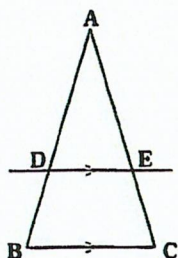


【証明】 $\triangle DBC$ と $\triangle ECB$ において、

$$\begin{aligned} \text{仮定より, } BD &= CE \dots ① \\ \text{共通な辺だから, } BC &= CB \dots ② \\ AB = AC \text{ より, } \angle DBC &= \angle ECB \dots ③ \end{aligned}$$

ドライ③

下の図のように、 $AB = AC$ である二等辺三角形があり、底辺BCに平行な直線が辺AB, ACと交わる点をそれぞれD, Eとする。このとき、 $\triangle ADE$ は二等辺三角形である。図の中に、等しい辺や角に同じ印をつけ、このことを証明しなさい。



【証明】

$$\begin{aligned} AB = AC \text{ より, } \angle ABC &= \angle ACB \dots ① \\ DE \parallel BC \text{ より, } \angle ADE &= \angle ABC, \angle AED = \angle ACB \dots ② \\ ①, ② \text{ より, } \angle ADE &= \angle AED \\ \text{よって, } AD &= AE \text{ が等しいから, } \triangle ADE \text{ は二等辺三角形である。} \end{aligned}$$

おさえておこう!

ポイント

二等辺三角形になるための条件

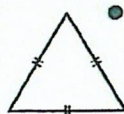
- 2辺が等しい三角形は、二等辺三角形である。【定義】
- 2つの角が等しい三角形は、二等辺三角形である。

大切

ステップ ③ 正三角形の性質

正三角形は二等辺三角形の特別なものであり、正三角形は二等辺三角形であるともいえる。

ポイント



● 正三角形の性質

【定義】 3 辺が等しい三角形を正三角形という。

【定理】 正三角形の 3 つの角は等しく、 60° である。

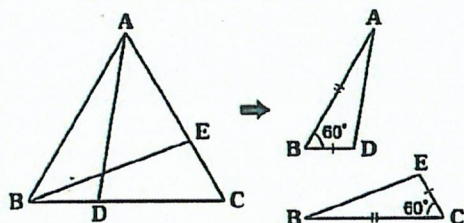
● 正三角形になるための条件

① 3 辺が等しい三角形は、正三角形である。【定義】

② 3 つの角が等しい三角形は、正三角形である。

基本パターン ③

▼ 下の図の正三角形 ABC で、
BD = CE ならば、AD = BE と
なることを証明しなさい。



【証明】 $\triangle ABD$ と $\triangle BCE$ において、
 $\triangle ABC$ は正三角形 だから、

$$AB = BC \quad \dots ①, \quad \angle ABD = \angle BCE = 60^\circ \quad \dots ②$$

仮定より、 $BD = CE \quad \dots ③$

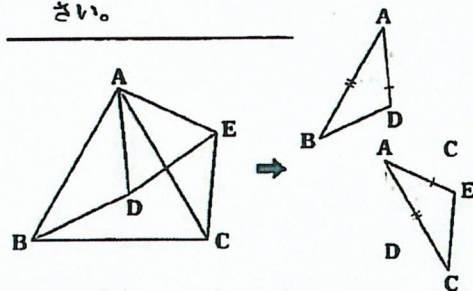
①、②、③より、2組の辺とその間の角 がそれぞれ等しいから、

$$\triangle ABD \equiv \triangle BCE$$

よって、対応する辺の長さは等しいから、 $AD = BE$

発展パターン ②

▼ 下の図で、 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ADE$ は、
ともに正三角形である。このとき、
 $BD = CE$ であることを証明しなさい。



【証明】 $\triangle ABD$ と $\triangle ACE$ において、

$\triangle ABC$ 、 $\triangle ADE$ は正三角形 だから、

$$AB = AC \quad \dots ①, \quad AD = AE \quad \dots ②$$

また、 $\angle BAC = \angle DAE = 60^\circ$ だから、

$$\angle BAD = 60^\circ - \angle DAC$$

$$\angle CAE = 60^\circ - \angle DAC$$

よって、 $\angle BAD = \angle CAE \quad \dots ③$

①、②、③より、2組の辺とその間の角 がそれぞれ等しいから、

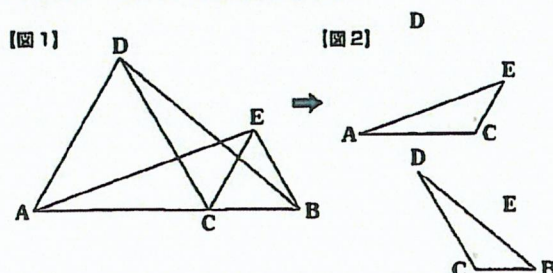
$$\triangle ABD \equiv \triangle ACE$$

よって、対応する辺の長さは等しいから、 $BD = CE$

このような方法はよく使われるので、しっかり慣れよう

トライ ④

下の図1のように、線分 AB 上に点 C をとり、AC、CB をそれぞれ 1 辺とする正三角形 ACD と正三角形 CBE をつくるとき、 $AE = DB$ である。図2の中に、等しい辺や角に同じ印をつけ、このことを証明しなさい。



【証明】 $\triangle ACE$ と $\triangle DCB$ において

$\triangle ACD$ 、 $\triangle CBE$ は正三角形 だから、

$$AC = DC \quad \dots ①, \quad CE = CB \quad \dots ②$$

また、 $\angle ACD = \angle ECB = 60^\circ$ だから、

$$\angle ACE = 60^\circ + \angle DCE, \quad \angle DCB = 60^\circ + \angle DCE$$

よって、 $\angle ACE = \angle DCB \quad \dots ③$

①、②、③より、2組の辺とその間の角 がそれぞれ等しいから、

$$\triangle ACE \equiv \triangle DCB$$

よって、 $AE = DB$

答え 基本③ ⑦ BC ⑧ 60° ⑨ 2組の辺とその間の角

⑩ 辺の長さ ⑪ BE

発展② ⑦ AC ⑧ AE ⑨ DAC ⑩ 2組の辺とその間の角

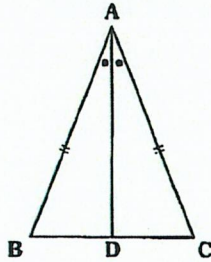
二等辺三角形と正三角形の特徴をきちんとつかまおう！

練習問題



たくさん解いて、解き方を工夫したり、問題に慣れよう！

- 1** 下の図で、 $AB=AC$ の二等辺三角形の $\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を D とする。このとき、二等辺三角形の定理である「二等辺三角形の頂角の二等分線は、底辺を垂直に2等分する」ということを証明しなさい。 **ステップ1**



【証明】 $\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ において、

$$\begin{cases} \text{仮定より,} & AB=AC & \cdots \text{①} \\ & \angle BAD=\angle CAD & \cdots \text{②} \\ \text{共通な辺だから,} & AD=AD & \cdots \text{③} \end{cases}$$

①, ②, ③より、2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから、

$$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$$

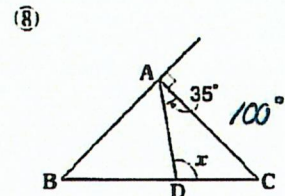
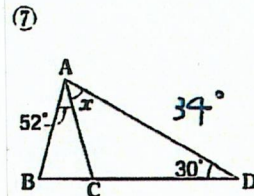
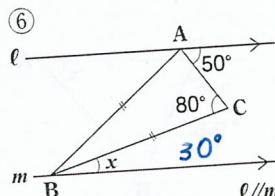
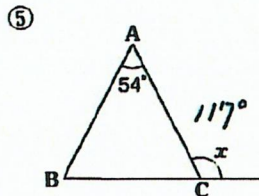
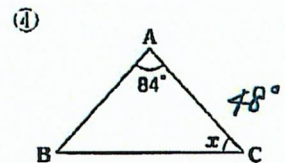
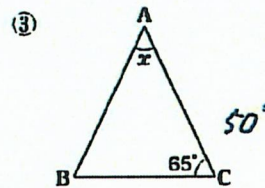
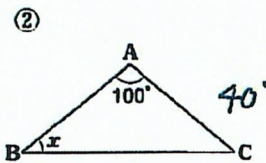
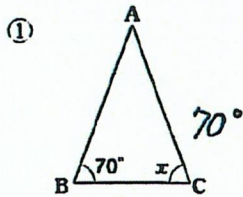
よって、 $BD=CD$ 、 $\angle ADB=\angle ADC$

また、 $\angle ADB+\angle ADC=180^\circ$ だから、

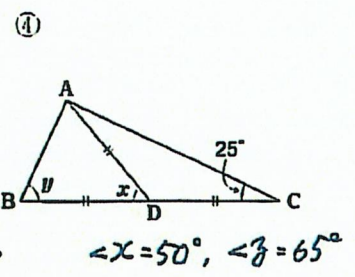
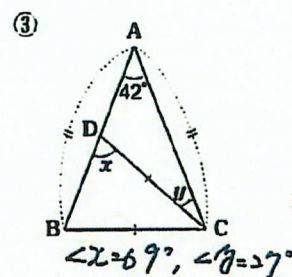
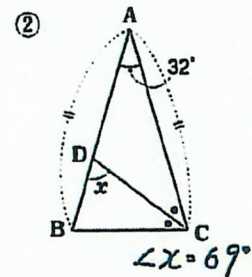
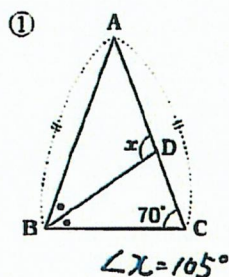
$$\angle ADB=\angle ADC=90^\circ$$

したがって、二等辺三角形の頂角の二等分線は、底辺を垂直に2等分する。

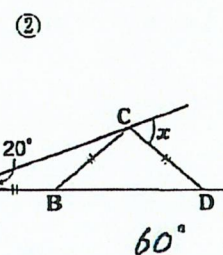
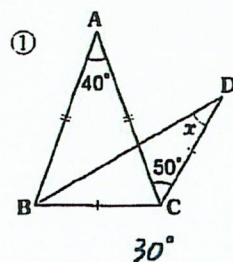
- 2** 次の図で、 $AB=AC$ のとき、 $\angle x$ の大きさを求めなさい。 **基本1**



- 3** 次の図で、 $\angle x$ 、 $\angle y$ の大きさを求めなさい。 **発展1**



- 4** 次の図で、 $\angle x$ の大きさを求めなさい。 **発展2**



- 5** 右の図の $\triangle ABC$ で、 $\angle A=36^\circ$ 、 $AB=AC$ 、 BD は $\angle B$ の二等分線の時、次の問いに答えなさい。 **発展3**

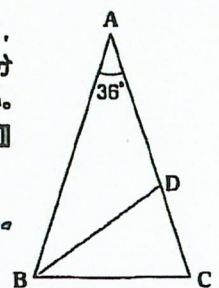
① 次の角の大きさを求めなさい。

1) $\angle ACB$ 72° 2) $\angle CBD$ 36°

3) $\angle BDC$ 72°

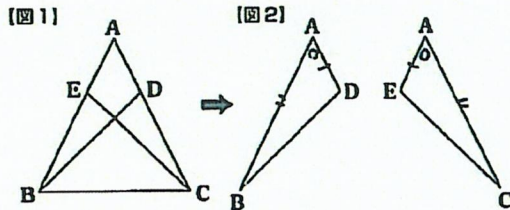
② BC と等しい線分をすべて答えなさい。

BD, AD



証明問題は解き方のパターンが限られていきます。

- 6** 下の図1のように、 $AB=AC$ である二等辺三角形 ABC の辺 AC , AB 上に、 $AD=AE$ となるようにそれぞれ点 D , E をとるとき、 $BD=CE$ であることを証明しなさい。(図2の中に、等しい辺や角に同じ印をつけて考えなさい。) **ステップ1**



【証明】 $\triangle ABD$ と $\triangle ACE$ において、

$$\begin{cases} \text{仮定より,} & AB = AC \quad \dots ① \\ & AD = AE \quad \dots ② \\ \text{共通な角だから,} & \angle BAD = \angle CAE \quad \dots ③ \end{cases}$$

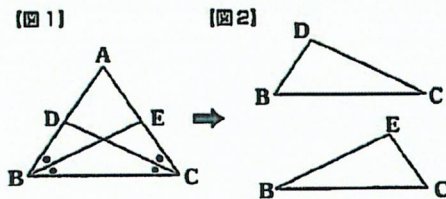
①, ②, ③より、2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから、

$$\triangle ABD \equiv \triangle ACE$$

よって、対応する辺の長さは等しいから、

$$BD = CE$$

- 7** 下の図1のように、 $AB=AC$ である二等辺三角形 ABC がある。 $\angle B$, $\angle C$ の二等分線をそれぞれ BE , CD とすると、 $\triangle DBC \equiv \triangle ECB$ であることを証明しなさい。(図2の中に、等しい辺や角に同じ印をつけて考えなさい。) **ステップ1**



【証明】 $\triangle DBC$ と $\triangle ECB$ において、

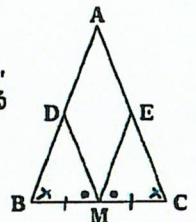
$$\begin{cases} AB=AC \text{ より, } \angle DBC = \angle ECB \quad \dots ① \\ \text{共通な辺だから, } BC = CB \quad \dots ② \\ \text{仮定より, } \angle DCB = \frac{1}{2} \angle ECB \\ \angle EBC = \frac{1}{2} \angle DBC \\ \text{①より, } \angle DCB = \angle EBC \quad \dots ③ \end{cases}$$

①, ②, ③より、2組の角とその両端の辺がそれぞれ等しいから、

$$\triangle DBC \equiv \triangle ECB$$

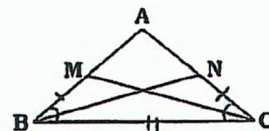
- 8** 右の図のように、 $AB=AC$ である二等辺三角形 ABC で、底辺 BC の中点を M とする。また、辺 AB , AC 上に $\angle BMD = \angle CME$ となるようにそれぞれ点 D , E をとる。このとき、 $MD=ME$ であることを証明しなさい。 **ステップ1**

右図参照

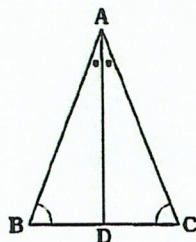


- 9** 右の図のように、 $AB=AC$ である二等辺三角形 ABC で、辺 AB , AC の中点をそれぞれ M , N とする。このとき、 $\angle MCB = \angle NBC$ であることを証明しなさい。 **ステップ1**

右図参照



- 10** 下の図のように、 $\angle B = \angle C$ である $\triangle ABC$ がある。 $\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を D とすると、「2つの角が等しい三角形は、二等辺三角形である。」ことを証明しなさい。 **ステップ2**



【証明】 $\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ において、

$$\begin{cases} \text{仮定より, } \angle B = \angle C \quad \dots ①, \angle BAD = \angle CAD \quad \dots ② \\ \text{また, } \angle ADB = 180^\circ - \angle B - \angle BAD \\ \angle ADC = 180^\circ - \angle C - \angle CAD \\ \text{①, ②より, } \angle ADB = \angle ADC \quad \dots ③ \\ \text{共通な辺だから, } AD = AD \quad \dots ④ \end{cases}$$

②, ③, ④より、2組の角とその両端の辺がそれぞれ等しいから、

$$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$$

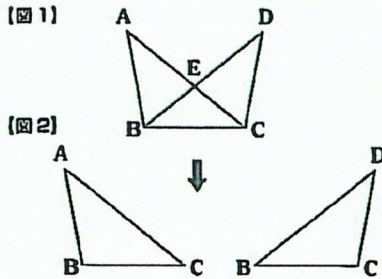
よって、対応する辺の長さは等しいから、

$$AB = AC$$

したがって、2つの角が等しい三角形は、二等辺三角形である。

1777の解き方をきくとおさえておきましょう。

- 11** 下の図1で、ACとDBの交点をEとする。このとき、 $AB=DC$ 、 $AC=DB$ ならば、 $\triangle EBC$ は二等辺三角形であることを証明しなさい。(図2の中に、等しい辺や角に同じ印をつけて考えなさい。)



【証明】 $\triangle ABC$ と $\triangle DCB$ において、

$$\begin{cases} \text{仮定より、} AB = DC \quad \dots ①, AC = DB \quad \dots ② \\ \text{共通な辺だから、} BC = CB \quad \dots ③ \end{cases}$$

①, ②, ③より、3辺 がそれぞれ等しいから、

$$\triangle ABC \equiv \triangle DCB$$

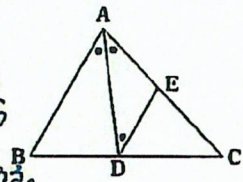
よって、対応する角の大きさは等しいから、

$$\angle ACB = \angle DBC$$

つまり、 $\angle ECB = \angle EBC$ より、

2つの角 が等しいから、 $\triangle EBC$ は二等辺三角形である。

- 12** 右の図のように、 $\triangle ABC$ の $\angle A$ の二等分線と辺BCとの交点をDとする。Dを通り、辺ABに平行な直線と辺ACとの交点をEとする。このとき、 $\triangle ADE$ は二等辺三角形であることを証明しなさい。

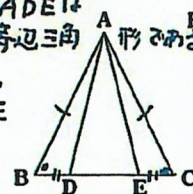


仮定より $\angle BAD = \angle EAD$

$\angle BAD = \angle EDA$ 2つの角が等しいから

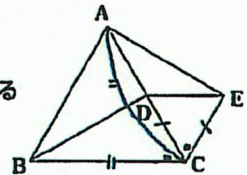
よって $\angle EAD = \angle EDA$ $\triangle ADE$ は二等辺三角形である。

- 13** 右の図のように、 $AB=AC$ である二等辺三角形ABCの底辺BC上に、 $BD=CE$ となるように点D、Eをとる。このとき、 $\triangle ADE$ は二等辺三角形であることを証明しなさい。



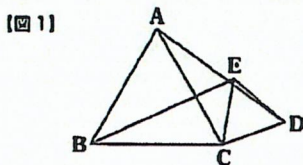
右図参照

- 14** 右の図で、 $\triangle ABC$ 、 $\triangle DCE$ はともに正三角形である。このとき、 $\triangle BCD \equiv \triangle ACE$ であることを証明しなさい。



右図参照

- 15** 下の図1で、 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ECD$ が正三角形であるとき、 $AD=BE$ となることを証明しなさい。(図2の中に、等しい辺や角に同じ印をつけて考えなさい。)



【証明】 $\triangle ACD$ と $\triangle BCE$ において、

$\triangle ABC$ 、 $\triangle ECD$ は正三角形だから、

$$AC = BC \quad \dots ①, CD = CE \quad \dots ②$$

また、 $\angle ACB = \angle ECD = 60^\circ$ だから、

$$\angle ACD = 60^\circ + \angle ACE$$

$$\angle BCE = 60^\circ + \angle ACE$$

よって、 $\angle ACD = \angle BCE \quad \dots ③$

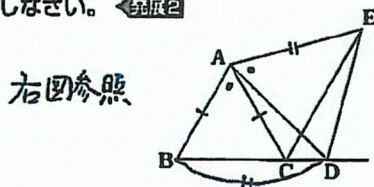
①, ②, ③より、2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから、

$$\triangle ACD \equiv \triangle BCE$$

よって、対応する辺の長さは等しいから、

$$AD = BE$$

- 16** 下の図の $\triangle ABC$ と $\triangle ADE$ はともに正三角形で、点Dは辺BCの延長上にある。このとき、 $\triangle ABD \equiv \triangle ACE$ であることを証明しなさい。



右図参照

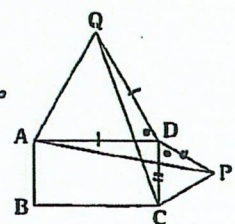
- 17** 下の図のように、長方形ABCDの辺AD、CDを1辺とする正三角形QADとPDCがある。このとき、次の問いに答えなさい。

発展2

① $\angle CDQ$ の大きさを求めなさい。 150°

② $\triangle CDQ \equiv \triangle PDA$ であることを証明しなさい。

右図参照



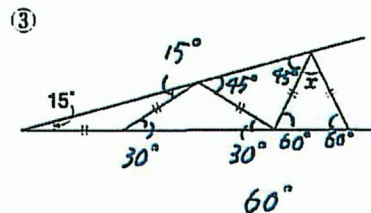
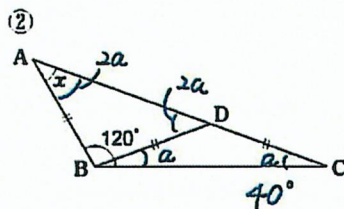
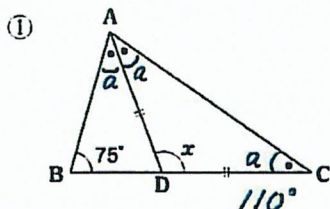
上位クラスだけが OK です。 (1) 110° をいねいに考えよう。

応用問題



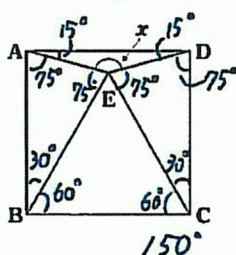
さあ、チャレンジしてみよう！ あきらめずに最後までトライ！

- ① 次の図で、 $\angle x$ の大きさを求めなさい。

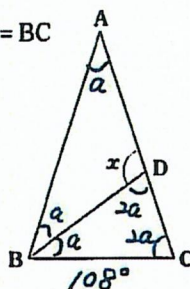


- ② 次の図で、 $\angle x$ の大きさを求めなさい。

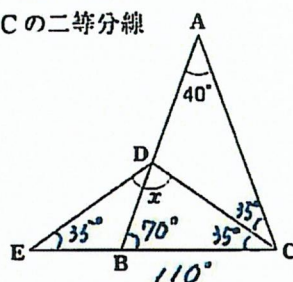
- ① 四角形 ABCD は正方形
△EBC は正三角形



- ② $AB = AC$
 $AD = BD = BC$

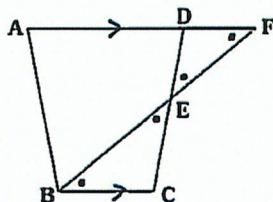


- ③ $AB = AC$, $BD = BE$
CD は $\angle C$ の二等分線



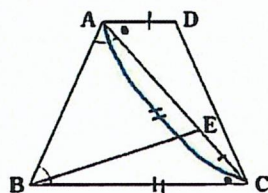
- ③ 下の図のように、 $AD \parallel BC$ の台形 ABCD がある。この台形の辺 DC 上に $BC = CE$ となるように点 E をとり、BE の延長と AD の延長との交点を F とする。このとき、 $DE = DF$ であることを証明しなさい。

右図参照



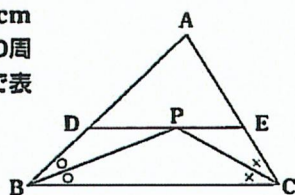
- ④ 下の図のように、 $AD \parallel BC$ の台形 ABCD がある。また、 $\angle CAB = \angle CBA$ で、この台形の対角線 AC 上に $AD = CE$ となるように点 E をとる。このとき、 $CD = BE$ となることを証明しなさい。

右図参照



- ⑤ 下の図のように、△ABC の $\angle B$, $\angle C$ の二等分線の交点を P とし、P を通り BC に平行な直線と AB, AC との交点を D, E とする。
 $AB = a$ cm, $AC = b$ cm とするとき、△ADE の周の長さを、 a , b の式で表しなさい。

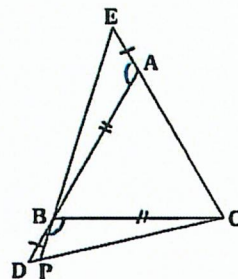
$a + b$ (cm)



- ⑥ 下の図の△ABC は正三角形である。D, E はそれぞれ辺 AB, CA の延長上に、 $BD = AE$ となるようにとった点で、P は EB の延長と DC との交点である。このとき、次の問いに答えなさい。

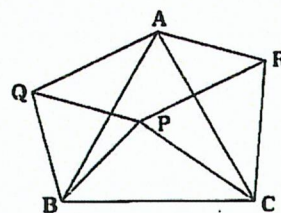
- ① △AEB と合同な三角形を答えなさい。△BDC
② ①で答えた合同な2つの三角形を利用して、 $\angle BPC = 60^\circ$ となることを証明しなさい。

右図参照



- ⑦ 下の図のように、正三角形 ABC の内部に点 P をとり、PB を1辺とする正三角形 QBP と、PC を1辺とする正三角形 RPC をつくる。次に、点 A と Q, 点 A と R をそれぞれ結ぶ。このとき、後の問いに答えなさい。

- ① △PBC と合同な三角形を2つ答えなさい。△QBA, △RAC
② 図の中に、点と点を結んで線分を1本ひくと、①以外に1組の合同な三角形ができる。それはどれとどれか、記号を使って答えなさい。
△AQP と △PRA または △AQR と △PRQ



直角三角形のみに使える合同条件が2つあります。きんちとおぼえておきましょう。

2. 直角三角形, 定理の逆

ステップ 1 直角三角形の合同条件

2つの直角三角形は、次のどちらかの条件が成り立てば合同である。

暗記

直角三角形の直角に
対する辺を斜辺という。

ポイント 直角三角形の合同条件 ($\triangle ABC \equiv \triangle DEF$)

① 斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しい。

② 斜辺と他の1辺がそれぞれ等しい。

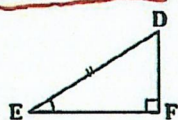
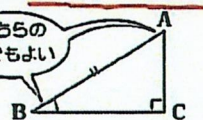
ポイント

直角三角形

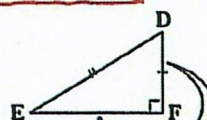
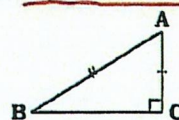
斜辺

1つの
角が直角

どちらの
角でもよい



$AB = DE, \angle C = \angle F = 90^\circ, \angle B = \angle E$



どちらの辺でもよい

$AB = DE, \angle C = \angle F = 90^\circ, AC = DF$

基本学習 直角三角形の合同条件 ① の証明

▼ 下の図で、 $\angle C = \angle F = 90^\circ, AB = DE, \angle B = \angle E$ ならば、 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ であることを証明しなさい。

【証明】

$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ において、

仮定より、 $AB = DE \dots ①, \angle B = \angle E \dots ②$

$\angle C = \angle F = 90^\circ \dots ③$

また、 $\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C, \angle D = 180^\circ - \angle E - \angle F$

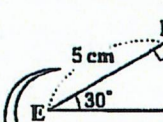
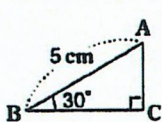
②, ③より、 $\angle A = \angle D \dots ④$

①, ②, ④より、1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから、

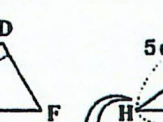
$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

基本パターン ①

▼ 次の図で、 $\triangle ABC$ と合同な三角形はどれか、記号 \equiv を使って表しなさい。また、そのときに使った合同条件は、上のポイント ①, ② のどちらか。



斜辺ではないのでダメ



斜辺は等しいがもう1つの角がわからない



残りの角を調べると $180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 30^\circ$

答え $\triangle ABC \equiv \triangle JKL$, 合同条件 ①

ポイント

合同な直角三角形の見つけ方

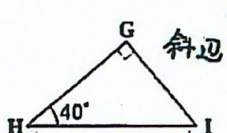
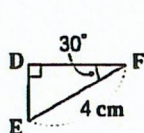
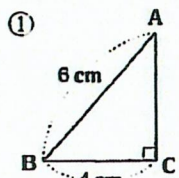
- まず、斜辺の長さが同じ三角形を見つける。
- 角の大きさを見るときは、残りの角にも注意する。

参考 直角三角形の角の求め方

直角以外の残りの2つの角の和は 90° だから、 $\angle L = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ と計算すると楽だよ。

ドライ ①

次の図で、合同な三角形はどれとどれか、記号 \equiv を使って表しなさい。また、そのときに使った合同条件を書きなさい。



$\triangle ABC \equiv \triangle QRP$

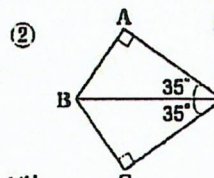
斜辺と他の1辺がそれぞれ等しい

$\triangle DEF \equiv \triangle JLK$

斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しい

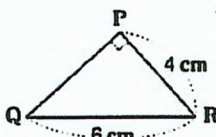
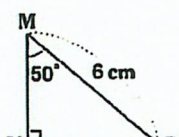
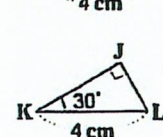
$\triangle GHI \equiv \triangle NOM$

斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しい



$\triangle ABD \equiv \triangle CBD$

斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しい。



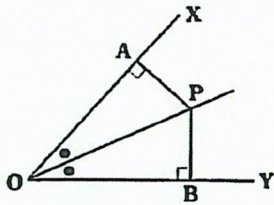
答え 基本学習 ① E ② F ③ 1組の辺とその両端の角
基本パターン ① JKL ② ③

直角三角形の合同条件を使うときは、必ず「直角があること」を証明しよう。

ステップ 2 直角三角形の合同の証明

三角形の合同の証明と同じで、その証明の理由(根拠)をはっきりと書くことが大切である。

基本パターン (2)



▼ 左の図は、 $\angle XOY$ の二等分線上の点 P から、 OX 、 OY にそれぞれ垂線 PA 、 PB をひいたものである。このとき、 $PA=PB$ となることを証明しなさい。

【証明】 $\triangle OAP$ と $\triangle OBP$ において、

$$\begin{cases} \text{仮定より、}\angle AOP = \angle BOP & \dots ① \\ \angle OAP = \angle OBP = 90^\circ & \dots ② \\ \text{共通な辺だから、} OP = OP & \dots ③ \end{cases}$$

直角が等しいという条件が必ずある

参考

これは、角の二等分線上の点から2辺までの距離が等しいことの証明である。

①、②、③より、直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいから、

$$\triangle OAP \equiv \triangle OBP$$

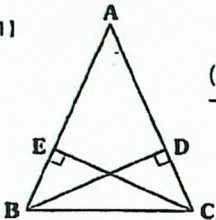
よって、対応する辺の長さは等しいから、 $PA=PB$

直角三角形の合同条件

トライ 2

下の図1の $\triangle ABC$ で、 B 、 C から辺 AC 、 AB にそれぞれ垂線 BD 、 CE をひく。 $BD=CE$ のとき、次の問いに答えなさい。

【図1】



(1) 図2の中に、等しい辺や角に同じ印をつけ、 $\triangle DBC \equiv \triangle ECB$ であることを証明しなさい。

【証明】 $\triangle DBC$ と $\triangle ECB$ において

$$\begin{cases} \text{仮定より、} BD = CE & \dots ①, \angle BDC = \angle CEB = 90^\circ & \dots ② \\ \text{共通な辺だから、} BC = CB & \dots ③ \end{cases}$$

①、②、③より、直角三角形の斜辺と他の1辺がそれぞれ等しいから、

$$\triangle DBC \equiv \triangle ECB$$

(2) $\triangle ABC$ はどんな三角形か。また、その理由を書きなさい。

二等辺三角形(理由) $\triangle DBC \equiv \triangle ECB$ より、 $\angle DCB = \angle ECB$ 2つの角が等しいから $\triangle ABC$ は二等辺三角形である。

ステップ 3 定理の逆

二等辺三角形の定理「二等辺三角形ならば、2つの角は等しい」

二等辺三角形になるための条件「2つの角が等しいならば、二等辺三角形である」

このように、ある定理の仮定と結論を入れかえたものを、その定理の逆という。

あることがらが正しい場合、その逆がすべて正しくなるとはかぎらない。

ポイント

定理の逆

「ならば、」
「ならば、」

基本パターン (3)

▼ 次のことがらの逆をいいなさい。また、それが正しいければ〔 〕に○を、正しくなければ〔 〕に×を書きなさい。

自然数 a 、 b で、 a も b も偶数 ならば、 $a+b$ は偶数 である。

答え 自然数 a 、 b で、 $a+b$ が偶数 ならば、 a も b も偶数 である。〔×〕

参考

2+4=6で偶数となるが、1+5=6のような場合もある。だから「 $a+b$ が偶数ならば、 a も b も偶数である」とは言えない。このように、あることがらが成り立たない例を反例という。あることがらが正しいことを示すには、反例を1つあげればよい。

トライ 3

次のことがらの逆をいいなさい。また、それが正しいかどうか答えなさい。

- ① $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ ならば、 $\angle A = \angle D$ である。 $\angle A = \angle D$ ならば $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ である。 正しくない。
- ② x が6の倍数ならば、 x は3の倍数である。 x が3の倍数ならば x は6の倍数である。 正しくない。

答え 基本2 ① BOP ② OP ③ 斜辺と1つの鋭角 基本3 ④ $a+b$ が偶数 ⑤ a も b も偶数 ⑥ ×

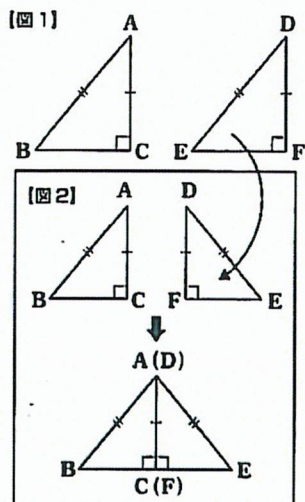
直角を見つける。あと1つの条件を問題文からさがしなさい。

練習問題



たくさん解いて、解き方を工夫したり、問題に慣れよう！

- 1** 下の図1で、 $\angle C = \angle F = 90^\circ$ 、 $AB = DE$ 、 $AC = DF$ ならば、 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ であることを証明しなさい。
(直角三角形の合同条件②の証明) **ステップ①**



【証明】

図2のように、 $\triangle DEF$ を裏返して、 AC と DF を重ねる。

$\angle C = \angle F = 90^\circ$ だから、 $\angle BCE = \angle C + \angle F = 180^\circ$ 。

したがって、 BCE は一直線となる。

よって、 $\triangle ABE$ は、 $AB = AE$ の二等辺三角形となり、

2つの底角は等しいから、 $\angle B = \angle E$... ①

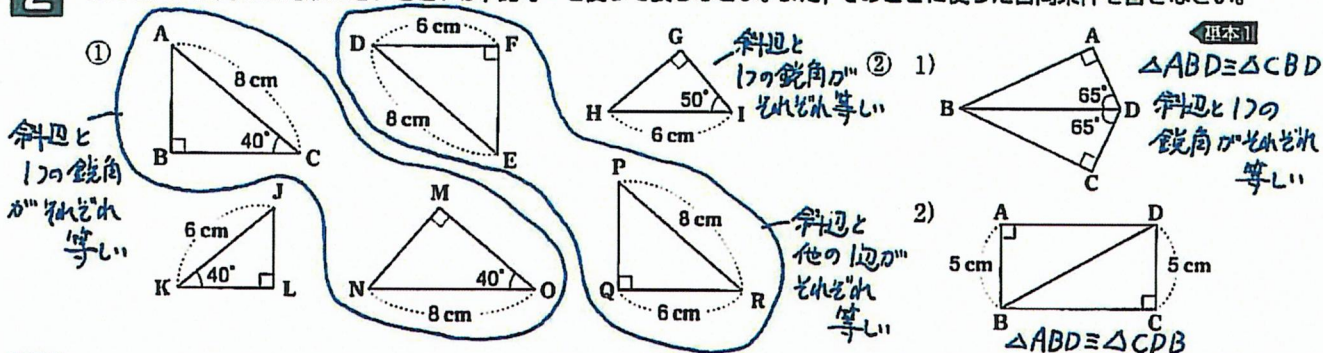
$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ において、

仮定より、 $AB = DE$... ②、 $\angle C = \angle F = 90^\circ$... ③

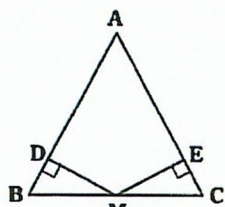
①、②、③より、直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいから、

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

- 2** 次の図で、合同な三角形はどれとどれか、記号 \equiv を使って表しなさい。また、そのときに使った合同条件を書きなさい。



- 3** 下の図のように、 $\triangle ABC$ の辺 BC の中点 M から、辺 AB 、 AC にそれぞれ垂線 MD 、 ME をひく。 $MD = ME$ のとき、次の問いに答えなさい。



- (1) $\triangle BMD \equiv \triangle CME$ であることを証明しなさい。

【証明】 $\triangle BMD$ と $\triangle CME$ において、

仮定より、 $BM = CM$... ①、 $MD = ME$... ②

$\angle MDB = \angle MEC = 90^\circ$... ③

①、②、③より、

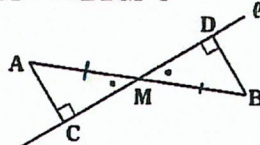
直角三角形の斜辺と他の1辺がそれぞれ等しいから、

$\triangle BMD \equiv \triangle CME$

- (2) $\triangle ABC$ はどんな三角形か。また、その理由を書きなさい。

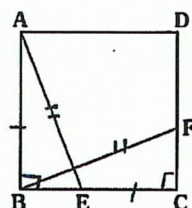
2つの角が等しいから
 $\triangle ABC$ は二等辺三角形である。

- 4** 下の図のように、線分 AB の中点 M を通る直線 ℓ に2点 A 、 B から垂線をひき、 ℓ との交点をそれぞれ C 、 D とする。このとき、 $\triangle ACM \equiv \triangle BDM$ であることを証明しなさい。



右図参照

- 5** 右の図のように、正方形 $ABCD$ の辺 BC 、 CD 上に、 $AE = BF$ となるように点 E 、 F をとる。このとき、 $\triangle ABE \equiv \triangle BCF$ であることを証明しなさい。



右図参照

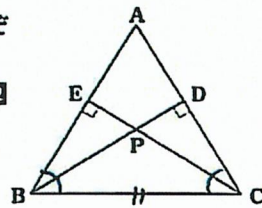
6

右の図の△ABCは、AB=ACの二等辺三角形である。B、Cから辺AC、ABにそれぞれ垂線BD、CEをひき、BDとCEとの交点をPとすると、次の問いに答えなさい。

基本2

- ① △EBC ≡ △DCBであることを利用して、∠ECB = ∠DBCであることを証明しなさい。

右図参照



- ② △PBCはどんな三角形か。また、その理由を書きなさい。

二等辺三角形

(理由) ①より∠PBC = ∠PCB 2つの角が等しいから△PBCは二等辺三角形である。

7

右の図の△ABCは、∠A = 90°の直角二等辺三角形である。∠Bの二等分線が辺ACと交わる点をDとし、Dから辺BCに垂線DEをひく。このとき、次の問いに答えなさい。

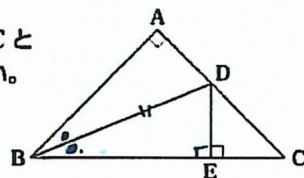
ステップ2

- ① △ABD ≡ △EBDであることを証明しなさい。

右図参照

- ② 線分ADと長さの等しい線分をすべて答えなさい。

線分ED, 線分EC



8

右の図の三角錐O-ABCで、Oから底面△ABCにひいた垂線をOHとする。このとき、OA = OB = OCならば、AH = BH = CHとなることを証明しなさい。

ステップ2

△OAHと△OBHにおいて、

仮定より OA = OB ... ①

∠OHA = ∠OHB = 90° ... ②

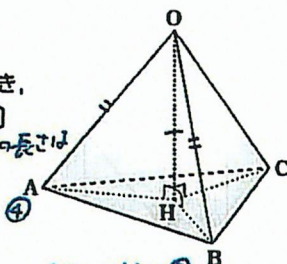
共通の辺だから OH = OH ... ③

①②③より
直角三角形の斜辺と他の2辺が等しいから
全等三角形であるから

△OAH ≡ △OBH

ふたつ対応する辺の長さは等しいから
AH = BH ... ④
同様にして

△OAH ≡ △OCHより AH = CH ... ⑤



9

右の図のように、∠BAC = 90°である直角二等辺三角形ABCがある。Aを通る直線ℓにB、Cからそれぞれ垂線BD、CEをひく。このとき、次の問いに答えなさい。

ステップ2

- ① △ABD ≡ △CAEであることを証明しなさい。

右図参照

- ② BD + CE = DEであることを証明しなさい。

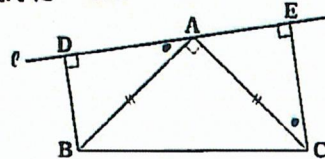
△ABD ≡ △CAEより

BD = AE

BD + CE = AE + AD = DE

対応する辺の長さは等しいから

AD = CE



10

次のことがらの逆をいいなさい。また、それが正しいかどうか答えなさい。

基本3

- ① △ABCで、∠B = ∠Cならば、AB = ACである。

- ② 2つの直線が平行ならば、錯角は等しい。

△ABCで、AB = ACならば、∠B = ∠Cである。... 正しい。

錯角が等しいならば、2つの直線が平行である。... 正しい。

- ③ 正三角形ならば、3つの角は等しい。

- ④ 整数a, bで、a > 0, b > 0ならば、ab > 0である。

三角形の3つの角が等しいならば、正三角形である。... 正しい。 整数a, bで ab > 0ならば a > 0, b > 0である。

気がきかぬまじい。そこまじい疑問ではない。かんじよく問う。... 正しい。

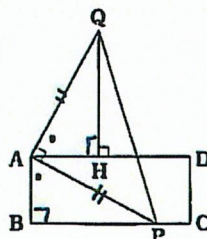
応用問題

さあ、チャレンジしてみよう!! あきらめずに最後までトライ!!

1

右の図のように、長方形ABCDで、辺BC上に点Pをとり、∠PAQ = 90°の直角二等辺三角形APQをつくる。頂点Qから辺ADに垂線をひき、ADとの交点をHとする。このとき、△ABP ≡ △AHQであることを証明しなさい。

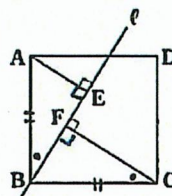
右図参照



2

右の図のように、正方形ABCDの頂点Bを通り、辺ADと交わる直線ℓに頂点A、Cから垂線をひき、ℓとの交点をそれぞれE、Fとする。このとき、AE = BFであることを証明しなさい。

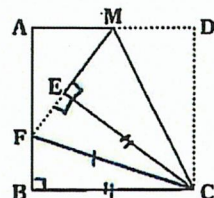
右図参照



3

右の図のように、正方形ABCDを、ADの中点Mと頂点Cを結ぶ直線を折り目として折り返す。頂点Dが移る点をE、MEの延長とABとの交点をFとすると、FE = FBであることを証明しなさい。

右図参照



平行四辺形の証明問題は 知識として身につけておくと、役立ちます。

3. 平行四辺形

ステップ ① 平行四辺形の性質

四角形の向かい合う辺を対辺、
向かい合う角を対角という。



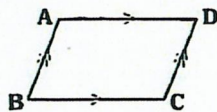
ポイント

平行四辺形

定義と定理の違いは必ず確認しよう

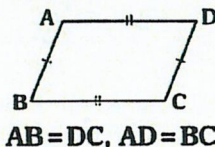
【定義】

2組の対辺がそれぞれ
平行な四角形を平行四辺形
という。



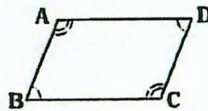
【定理】 平行四辺形の定義から、次の性質が導かれる。

① 2組の対辺はそれぞれ
等しい。



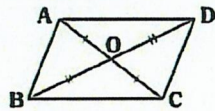
$AB=DC, AD=BC$

② 2組の対角はそれぞれ
等しい。



$\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$

③ 対角線はそれぞれの中
点で交わる。



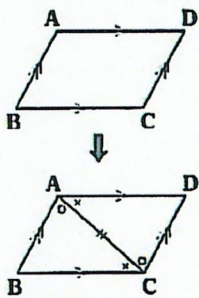
$OA=OC, OB=OD$

【参考】 平行四辺形 ABCD を $\square ABCD$ と書くことがある。

基本学習 平行四辺形の性質の証明

▼ 「平行四辺形の 2組の対辺はそれぞれ等しい。」このことを、対角線 AC をひいて証明しなさい。

【証明】 $\triangle ABC$ と $\triangle CDA$ において、



AB // DC より、錯角は等しいから、 $\angle BAC = \angle DCA$... ①

AD // BC より、錯角は等しいから、 $\angle BCA = \angle DAC$... ②

共通な辺だから、 $AC = CA$... ③

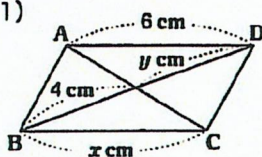
①、②、③より、1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから、 $\triangle ABC \cong \triangle CDA$

よって、 $AB = CD, BC = DA$... 結論

基本パターン ①

▼ 次の図の $\square ABCD$ で、 x, y の値を求めなさい。

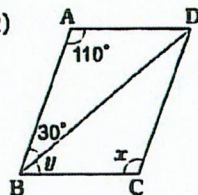
1)



対辺は等しい
 $x = 6$ (cm)

対角線は中点で交わる
 $y = 4$ (cm)

2)



和が 180°
 $\angle ABC = 180^\circ - \angle BAD$
 $= 70^\circ$

$\angle x = 110$

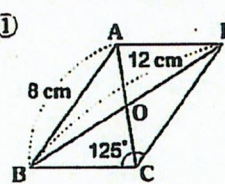
$\angle y = 70^\circ - 30^\circ = 40$

対角は等しい

ドライ ①

次の図の $\square ABCD$ で、線分の長さや角の大きさをそれぞれ求めなさい。

①



1) 線分 CD
8 cm

2) 線分 OB
6 cm

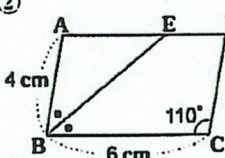
3) $\angle BAD$

125°

4) $\angle ABC$

55°

②



1) $\angle AEB$
35°

2) 線分 AE
4 cm

答え 基本学習 ⑦ DCA ⑧ 錯 ⑨ DAC ⑩ 1組の辺とその両端の角
⑪ CDA 基本1 ⑫ 6 ⑬ 4 ⑭ 110 ⑮ 40

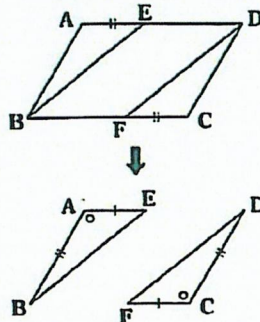
証明は難しくありません。慣れてしまえばいい。

大成功

ステップ 2 平行四辺形の性質を利用した証明

基本パターン (2)

▼ 下の図の $\square ABCD$ で、辺 AD 、 BC 上に、 $AE = CF$ となるようにそれぞれ点 E 、 F をとる。このとき、 $\triangle ABE \equiv \triangle CDF$ であることを証明しなさい。



【証明】

$\triangle ABE$ と $\triangle CDF$ において、

仮定より、 $AE = CF$... ①

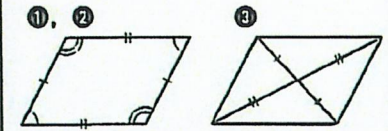
平行四辺形の対辺は等しいから、 $AB = CD$... ②

平行四辺形の対角は等しいから、 $\angle BAE = \angle DCF$... ③

①、②、③より、2組の辺とその間の角 がそれぞれ等しいから、 $\triangle ABE \equiv \triangle CDF$

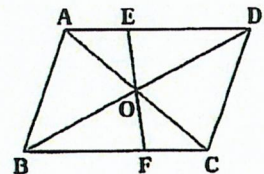
確認 平行四辺形の性質

- ① 2組の対辺はそれぞれ等しい。
- ② 2組の対角はそれぞれ等しい。
- ③ 対角線はそれぞれの中点で交わる。



トライ (2)

右の図の $\square ABCD$ で、対角線の交点を O とし、 O を通る直線と辺 AD 、 BC との交点をそれぞれ E 、 F とする。このとき、 $OE = OF$ であることを、図の中に等しい辺や角に同じ印をつけて証明しなさい。



【証明】 $\triangle OAE$ と $\triangle OCF$ において

平行四辺形の対角線はそれぞれの 中点 で交わるから、 $OA = OC$... ①

対頂角は等しいから、 $\angle AOE = \angle COF$... ②

$AD \parallel BC$ より、錯角 は等しいから、 $\angle OAE = \angle OCF$... ③

①、②、③より、1組の辺とその両端の角 がそれぞれ等しいから、 $\triangle OAE \equiv \triangle OCF$

よって、

$$OE = OF$$

平行四辺形になるための条件は全部ふたつ。

このうちのどれか1つにあてはめれば平行四辺形になります。

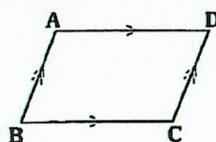
ステップ 3 平行四辺形になるための条件

ポイント

平行四辺形になるための条件

四角形は、次の5つの条件のいずれかが成り立てば平行四辺形である。

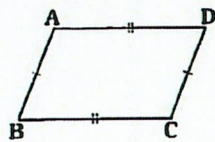
① 2組の対辺がそれぞれ平行である。



【定義】

$AB \parallel DC$
 $AD \parallel BC$

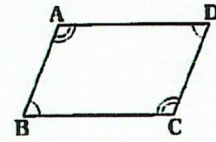
② 2組の対辺がそれぞれ等しい。



【性質の逆】

$AB = DC$
 $AD = BC$

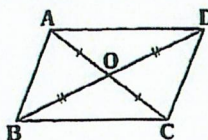
③ 2組の対角がそれぞれ等しい。



【性質の逆】

$\angle A = \angle C$
 $\angle B = \angle D$

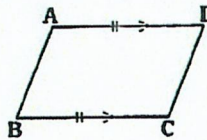
④ 対角線がそれぞれの中点で交わる。



【性質の逆】

$OA = OC$
 $OB = OD$

⑤ 1組の対辺が平行でその長さが等しい。



$AD \parallel BC$
 $AD = BC$

答え

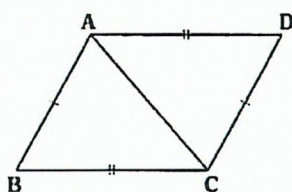
基本2 ⑦ CF ⑧ CD ⑨ DCF

⑩ 2組の辺とその間の角

答えはまってるのよ。パターンを暗記してしまおう。

基本学習 平行四辺形になるための条件②の証明

▼ 下の図の四角形ABCDで、 $AB=CD$ 、 $BC=DA$ ならば、 $AB \parallel DC$ 、 $AD \parallel BC$ であることを証明しなさい。



【証明】 $\triangle ABC$ と $\triangle CDA$ において、

$$\begin{cases} \text{仮定より、} AB = CD \dots ①, BC = DA \dots ② \\ \text{共通な辺だから、} AC = CA \dots ③ \end{cases}$$

①、②、③より、3辺 がそれぞれ等しいから、 $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$

よって、 $\angle BAC = \angle DCA$ だから、 $AB \parallel DC$

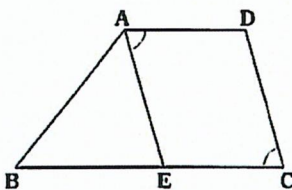
$\angle BCA = \angle DAC$ だから、 $AD \parallel BC$

平行四辺形の定義

これは、平行四辺形になるための条件②「2組の対辺がそれぞれ等しい四角形は平行四辺形である。」の証明である。

基本パターン③

▼ 下の図のように、 $AD \parallel BC$ である台形ABCDの辺BC上に、 $\angle DAE = \angle DCB$ となるような点Eをとる。このとき、四角形AECDは平行四辺形であることを証明しなさい。



【証明】 四角形AECDにおいて、

$$\text{仮定より、} \angle DAE = \angle DCE \dots ①, AD \parallel EC \dots ②$$

$$\text{②より、錯角は等しいから、} \angle DAE = \angle AEB \dots ③$$

$$\text{①、③より、} \angle DCE = \angle AEB$$

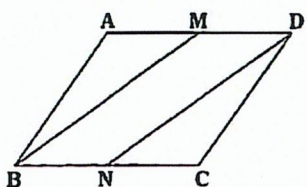
よって、同位 角が等しいから、 $AE \parallel DC \dots ④$

②、④より、2組の対辺がそれぞれ平行であるから、
四角形AECDは平行四辺形である。

平行四辺形になるための条件を必ず書くこと

トライ③

下の図の $\square ABCD$ で、辺AD、BC上の中点をそれぞれM、Nとする。このとき、四角形MBNDは平行四辺形であることを証明しなさい。



【証明】 四角形MBNDにおいて、

$$\text{平行四辺形の対辺は平行だから、} MD \parallel BN \dots ①$$

$$\text{平行四辺形の対辺は等しいから、} AD = BC$$

$$\text{また、仮定より、} MD = \frac{1}{2} AD, BN = \frac{1}{2} BC$$

$$\text{よって、} MD = BN \dots ②$$

①、②より、1組の対辺が平行で、その長さが等しいから、

四角形MBNDは平行四辺形である。

答え

基本学習

CD

DA

3辺

DCA

DAC

基本③

DCE

AEB

同位

パターンに慣れるまで練習しよう。

練習問題

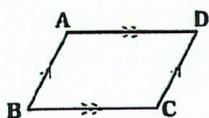


たくさん解いて、解き方を工夫したり、問題に慣れよう！

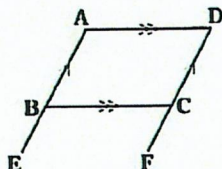
- 1 下の図1の $\square ABCD$ で、「平行四辺形の対角はそれぞれ等しい。」という性質を証明する。このとき、次の問いに答えなさい。

ステップ1

【図1】



【図2】



- ① 仮定と結論を、図1の中の記号を使って、式で表しなさい。
② 図2のように、辺AB、DCの延長上に点E、Fをとり、このことを証明しなさい。

【証明】 $AB \parallel DC$ 、 $AD \parallel BC$ より、

同位角は等しいから、 $\angle BAD = \angle EBC$

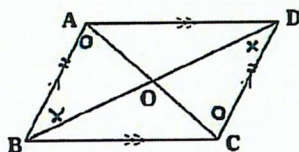
錯角は等しいから、 $\angle BCD = \angle EBC$

よって、 $\angle BAD = \angle BCD$

同様に、 $\angle ADC = \angle BCF = \angle ABC$

- 2 下の図の $\square ABCD$ で、「平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わる。」という性質を証明する。このとき、次の問いに答えなさい。

ステップ1



【証明】

$\triangle OAB$ と $\triangle OCD$ において、

{ 平行四辺形の対辺は等しいから、 $AB = CD$... ①

$AB \parallel DC$ より、錯角は等しいから、

$\angle OAB = \angle OCD$... ②, $\angle OBA = \angle ODC$... ③

①, ②, ③より、1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから、

$\triangle OAB \cong \triangle OCD$

よって、 $OA = OC$ 、 $OB = OD$

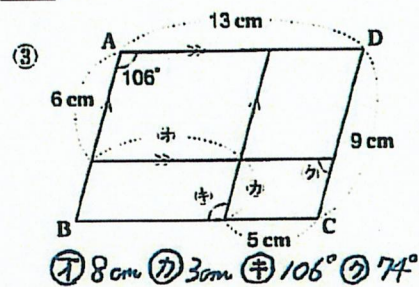
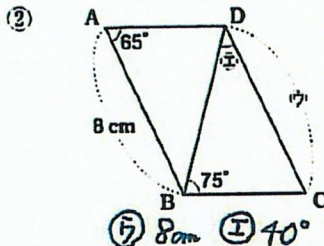
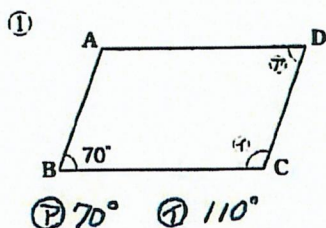
- ① 仮定と結論を、図の中の見号を使って、式で表しなさい。

省略

- ② 上の性質を、右のように証明しなさい。(図の中に、等しい辺や角に同じ印をつけて答えなさい。)

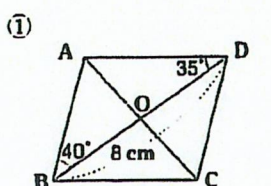
- 3 次の図の $\square ABCD$ で、⑦～⑨の線分の長さや角の大きさを求めなさい。

基本III

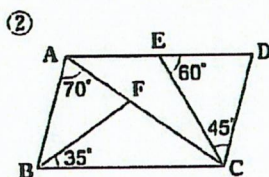


- 4 次の図の $\square ABCD$ で、線分の長さや角の大きさをそれぞれ求めなさい。

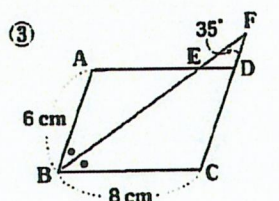
基本III



- 1) 線分 OD 4 cm
2) $\angle DBC$ 35°
3) $\angle BCD$ 105°

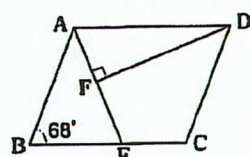


- 1) $\angle ACE$ 25°
2) $\angle ABF$ 40°
3) $\angle BFC$ 110°



- 1) $\angle AEB$ 35°
2) $\angle ADC$ 70°
3) 線分 ED 2 cm

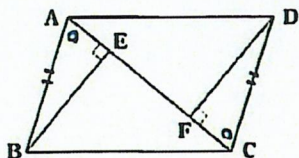
- ④ $AB = AE$, $AE \perp DF$



- 1) $\angle BCD$ 112°
2) $\angle CDF$ 46°

- 5 下の図のような $\square ABCD$ がある。頂点 B, D から対角線 AC へ垂線 BE, DF をひいたとき、 $BE=DF$ であることを証明しなさい。(図の中に、等しい辺や角に同じ印をつけて考えなさい。)

基本2



【証明】

$\triangle ABE$ と $\triangle CDF$ において、

$$\begin{cases} \text{仮定より, } \angle AEB = \angle CFD = 90^\circ \dots (1) \\ \text{平行四辺形の対辺は等しいから, } AB = CD \dots (2) \\ AB \parallel DC \text{ より, } \angle BAE = \angle DCF \dots (3) \end{cases}$$

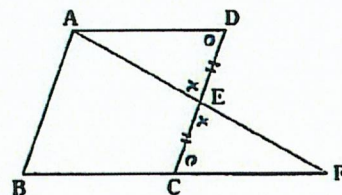
(1), (2), (3)より、直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいから、

$$\triangle ABE \equiv \triangle CDF$$

$$\text{よって, } BE = DF$$

- 6 右の図の $\square ABCD$ で、辺 DC の中点を E とし、 AE の延長と BC の延長との交点を F とする。このとき、 $BC=CF$ であることを証明しなさい。(図の中に、等しい辺や角に同じ印をつけて考えなさい。)

基本2



【証明】 $\triangle ADE$ と $\triangle FCE$ において、

$$\begin{cases} \text{仮定より, } DE = CE \dots (1) \\ \text{対頂角は等しいから, } \angle AED = \angle FEC \dots (2) \\ AD \parallel CF \text{ より, } \angle ADE = \angle FCE \dots (3) \end{cases}$$

(1), (2), (3)より、1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから、 $\triangle ADE \equiv \triangle FCE$

$$\text{よって, } AD = FC \dots (4)$$

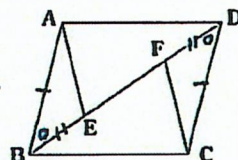
$$\text{また, 平行四辺形の対辺は等しいから, } AD = BC \dots (5)$$

$$(4), (5) \text{より, } BC = CF$$

- 7 右の図の $\square ABCD$ で、対角線 BD 上に、 $BE=DF$ となるようにそれぞれ点 E, F をとる。このとき、 $AE=CF$ であることを証明しなさい。

基本2

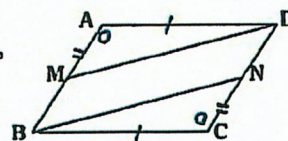
右図参照



- 8 右の図の $\square ABCD$ で、辺 AB, CD の中点をそれぞれ M, N とする。このとき、 $MD=NB$ であることを証明しなさい。

基本2

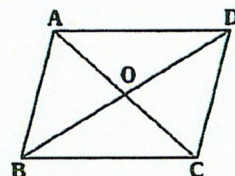
右図参照



- 9 四角形 $ABCD$ において、次の条件の場合、平行四辺形であるといえるものには〔 〕に○を、いえないものには〔 〕に×を書きなさい。

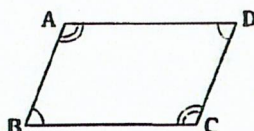
ステップ3

- (1) $AB=DC, AD=BC$ [○] (2) $AO=CO, \angle BAD = \angle DCB$ [×]
(3) $AD \parallel BC, AD=BC$ [○] (4) $\angle BAD = \angle DCB = 100^\circ, \angle ABC = 80^\circ$ [○]



- 10 下の図の四角形 $ABCD$ で、 $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$ ならば、 $AB \parallel DC, AD \parallel BC$ であることを証明しなさい。(注：これは、「2組の対角がそれぞれ等しい四角形は平行四辺形である。」ことの証明である。)

ステップ3



【証明】 四角形だから、 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$

$$\text{仮定より, } \angle A = \angle C, \angle B = \angle D$$

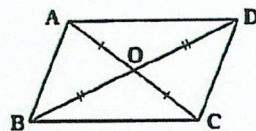
$$\text{よって, } \angle A + \angle B = 180^\circ \text{ だから, } AD \parallel BC$$

$$\text{同様に, } \angle A + \angle D = 180^\circ \text{ だから, } AB \parallel DC$$

11

右の図の四角形 ABCD で、 $OA=OC$ 、 $OB=OD$ のとき、次の問いに答えなさい。

ステップ 3



① $AB \parallel DC$ であることを、右のように証明しなさい。

② ①と同様にして、 $AD \parallel BC$ であることを証明しなさい。(注：これは、「対角線がそれぞれ等しい四角形は平行四角形である。」ことの証明である。)

【証明】

$\triangle OAB$ と $\triangle OCD$ において、

$$\begin{cases} \text{仮定より、} OA = OC \dots ①, OB = OD \dots ② \\ \text{対頂角は等しいから、} \angle AOB = \angle COD \dots ③ \end{cases}$$

①、②、③より、2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから、

$$\triangle OAB \cong \triangle OCD$$

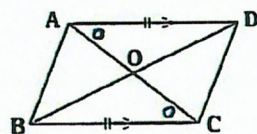
$$\text{よって、} \angle OAB = \angle OCD$$

したがって、錯角が等しいから、 $AB \parallel DC$

12

右の図の四角形 ABCD で、 $AD \parallel BC$ 、 $AD=BC$ ならば、 $AB \parallel DC$ であることを、 $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ となることを利用して証明しなさい。(注：これは、「1組の対辺が平行でその長さが等しい四角形は平行四角形である。」ことの証明である。)

ステップ 3

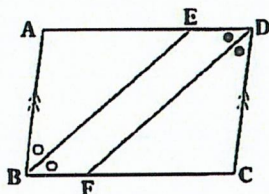


右図参照

13

下の図の $\square ABCD$ で、 $\angle B$ 、 $\angle D$ の二等分線が辺 AD 、 BC とそれぞれ点 E 、 F で交わっている。このとき、四角形 $EBFD$ は平行四角形であることを証明しなさい。

基本 G

【証明】四角形 $EBFD$ において、

$$\text{仮定より、} AD \parallel BC \text{ だから、} ED \parallel BF \dots ①$$

$$\text{平行四角形の対角は等しいから、} \angle ABC = \angle ADC$$

$$\text{また、仮定より、} \angle EBC = \frac{1}{2} \angle ABC, \angle ADF = \frac{1}{2} \angle ADC$$

$$\text{よって、} \angle EBC = \angle ADF \dots ②$$

$$\text{①より、錯角は等しいから、} \angle ADF = \angle DFC \dots ③$$

$$\text{②、③より、} \angle EBC = \angle DFC$$

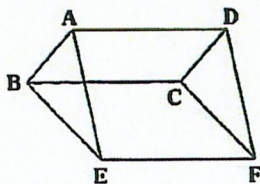
$$\text{よって、同位角が等しいから、} EB \parallel DF \dots ④$$

①、④より、2組の対辺がそれぞれ平行だから、四角形 $EBFD$ は平行四角形である。

14

下の図で、2つの四角形 $ABCD$ 、 $EBCF$ はともに平行四角形である。このとき、四角形 $AEFD$ は平行四角形であることを証明しなさい。

基本 G

【証明】四角形 $AEFD$ において、

$$\text{平行四角形の対辺は平行だから、} AD \parallel BC, BC \parallel EF$$

$$\text{よって、} AD \parallel EF \dots ①$$

$$\text{平行四角形の対辺は等しいから、} AD = BC, BC = EF$$

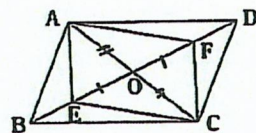
$$\text{よって、} AD = EF \dots ②$$

①、②より、1組の対辺が平行で長さが等しいから、四角形 $AEFD$ は平行四角形である。

15

右の図の $\square ABCD$ で、対角線 BD 上に $OE=OF$ となるような2点 E 、 F をとる。このとき、四角形 $AECF$ は平行四角形であることを証明しなさい。

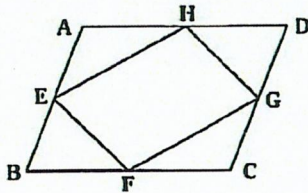
基本 G



右図参照

16

下の図の $\square ABCD$ で、各辺の中点をそれぞれE, F, G, Hとする。このとき、四角形EFGHは平行四辺形であることを証明しなさい。(図の中に、等しい辺や角に同じ印をつけて考えなさい。) **ステップ③**



【証明】 $\triangle AEH$ と $\triangle CGF$ において、

平行四辺形の対辺は等しいから、 $AB = DC$

また、仮定より、 $AE = \frac{1}{2} AB$, $CG = \frac{1}{2} DC$

よって、 $AE = CG$... ①

同様にして、 $AH = CF$... ②

平行四辺形の対角は等しいから、 $\angle EAH = \angle GCF$... ③

①, ②, ③より、2組の辺とその間の角 がそれぞれ等しいから、

$\triangle AEH \equiv \triangle CGF$

よって、 $EH = GF$... ④

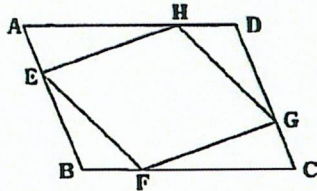
同様にして、 $\triangle BFE \equiv \triangle DHG$ より、 $EF = GH$... ⑤

④, ⑤より、2組の対辺 がそれぞれ等しいから、

四角形EFGHは平行四辺形である。

17

下の図の $\square ABCD$ で、各辺上に、 $AE = CG$, $BF = DH$ となるように点E, F, G, Hをとる。このとき、四角形EFGHは平行四辺形であることを証明しなさい。(図の中に、等しい辺や角に同じ印をつけて考えなさい。) **ステップ③**



【証明】

$\triangle AEH$ と $\triangle CGF$ において、

仮定より、 $AE = CG$... ①

平行四辺形の対辺は等しいから、 $AD = BC$

仮定より、 $BF = DH$

また、 $AH = AD - DH$, $CF = BC - BF$

よって、 $AH = CF$... ②

平行四辺形の対角は等しいから、 $\angle EAH = \angle GCF$... ③

①, ②, ③より、2組の辺とその間の角 がそれぞれ等しいから、

$\triangle AEH \equiv \triangle CGF$

よって、 $EH = GF$... ④

同様にして、 $\triangle EBF \equiv \triangle GDH$ より、 $EF = GH$... ⑤

④, ⑤より、2組の対辺 がそれぞれ等しいから、

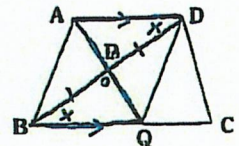
四角形EFGHは平行四辺形 である。

18

右の図のように、 $AD \parallel BC$ の台形ABCDの対角線BD上に、中点Pをとる。APの延長と辺BCとの交点をQとすると、四角形ABQDは平行四辺形であることを証明しなさい。

左図参照

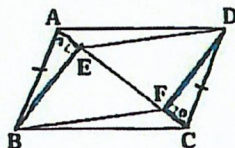
ステップ③



19

下の図の $\square ABCD$ で、頂点B, Dから対角線ACへ垂線BE, DFをそれぞれひく。このとき、四角形EBFDは平行四辺形であることを証明しなさい。

ステップ③

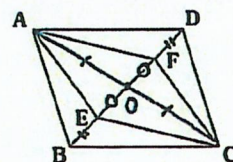


左図参照

20

下の図の $\square ABCD$ で、対角線BD上に、 $BE = DF$ となるように点E, Fをとる。このとき、四角形AECFは平行四辺形であることを証明しなさい。

ステップ③



左図参照

上位クラスのみでOK! 少し難しい問題もあるが 解いてみよう。

応用問題



さあ、チャレンジしてみよう! あきらめずに最後までトライ!

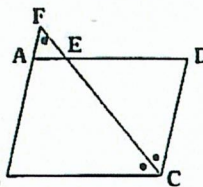
- ① 右の図の $\square ABCD$ で、 $\angle C$ の二等分線と辺 AD との交点を E 、辺 BA の延長との交点を F とする。 $AD=8\text{ cm}$ 、 $CF=10\text{ cm}$ のとき、 $\triangle FBC$ の周の長さを求めなさい。

$\triangle BCF$ が二等辺三角形であること

$\triangle FBC$ の周の長さは

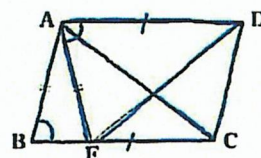
気付く

$$BC + BF + CF = 8 + 8 + 10 = 26(\text{cm})$$



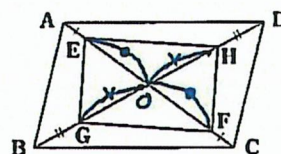
- ② 右の図の $\square ABCD$ で、辺 BC 上に、 $AB=AE$ となるような点 E をとる。このとき、 $\triangle ABC \equiv \triangle EAD$ であることを証明しなさい。

右図参照



- ③ 右の図の $\square ABCD$ で、対角線 AC 、 BD 上に、 $AE=CF$ 、 $BG=DH$ となるように点 E 、 F 、 G 、 H をとる。このとき、四角形 $EGFH$ は平行四辺形であることを証明しなさい。

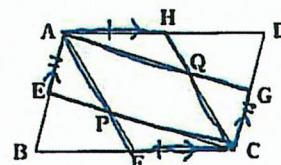
右図参照



やや難

- ④ 右の図の $\square ABCD$ で、各辺の中点をそれぞれ E 、 F 、 G 、 H とし、 AF と CE の交点を P 、 AG と CH の交点を Q とする。このとき、四角形 $APCQ$ は平行四辺形であることを証明しなさい。

右図参照



- ⑤ 右の図のように、 $AB=AC=6\text{ cm}$ 、 $BC=5\text{ cm}$ の二等辺三角形がある。辺 BC 上に点 P をとり、 P から辺 AB 、 AC に平行な直線をひき、辺 AC 、 AB との交点をそれぞれ Q 、 R とする。このとき、次の問いに答えなさい。

① $AR=QP$ であることを証明しなさい。

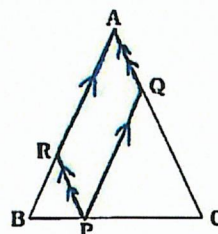
② $\triangle RBP$ はどんな三角形か。

右図参照

二等辺三角形

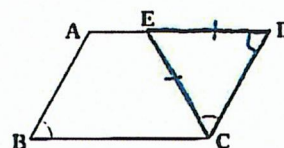
③ 四角形 $ARPQ$ の周の長さを求めなさい。

12cm



- ⑥ 右の図の $\square ABCD$ で、辺 AD 上に、 $\angle ABC = \angle DCE$ となるような点 E をとる。このとき、 $AE+EC=BC$ であることを証明しなさい。

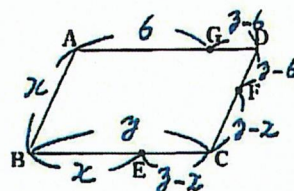
右図参照



やや難

- ⑦ 右の図のように、周囲の長さが 26 cm である $\square ABCD$ がある。この $\square ABCD$ の辺 BC 、 CD 、 DA 上に、 $BA=BE$ 、 $CE=CF$ 、 $DF=DG$ となるように点 E 、 F 、 G をとると、 $AG=6\text{ cm}$ であった。このとき、辺 AB 、 AD の長さを求めなさい。

辺 AB 5cm, 辺 BC 8cm



やや難

- ⑧ 右の図のように、 $\square ABCD$ の外側に、辺 BC 、 CD を1辺とする正三角形 BEC 、 CFD をかく。このとき、次の問いに答えなさい。

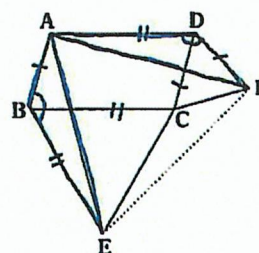
① $\triangle ABE \equiv \triangle FDA$ であることを証明しなさい。右図参照

② $\angle ABE = a^\circ$ とすると、 $\angle ECF$ の大きさを a を使って表しなさい。

a°

③ E と F を結ぶとき、 $\triangle AEF$ はどんな三角形になるか。

正三角形



この単元で大切なことは「等積変形」の考え方を知ること！

4. 特別な平行四辺形・平行線と面積

ステップ ① 長方形・ひし形・正方形

長方形・ひし形・正方形には、次のような性質がある。

ポイント

長方形

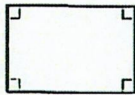
【定義】 4つの角が等しい四角形を長方形という。

【定理】 対角線の長さは等しい。

【長方形になるための条件】

平行四辺形において、
① 1つの角が直角である。
② 対角線の長さが等しい。

【性質の逆】



ひし形

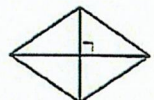
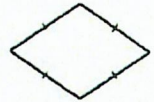
【定義】 4つの辺が等しい四角形をひし形という。

【定理】 対角線は垂直に交わる。

【ひし形になるための条件】

平行四辺形において、
① となり合う辺が等しい。
② 対角線が垂直に交わる。

【性質の逆】

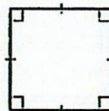


正方形

【定義】 4つの角がすべて等しく、4つの辺がすべて等しい四角形を正方形という。

【定理】

対角線の長さは等しく、垂直に交わる。



【正方形になるための条件】 平行四辺形において、長方形、ひし形になるための条件がともに成り立てば正方形である。

基本学習

- 長方形は、4つの角がすべて等しい。よって、2組の^⑦対角線がそれぞれ等しいので、平行四辺形である。
- ひし形は、4つの辺がすべて等しい。よって、2組の対辺がそれぞれ等しいので、^①平行四辺形である。
- 同様に、正方形も^②平行四辺形である。⇒ 長方形、ひし形、正方形は、平行四辺形の特別な形である。

基本パターン ①

小学5年生のときにしる内容。

ポイント

▽ 四角形に、辺や角についての条件を加えて、特別な四角形にかえていくとき、その条件にあてはまるものを(a)～(d)より選びなさい。（*同じ記号をくり返し選んでもよい）

正方形は、長方形とひし形の両方の性質を持つ平行四辺形である。



ア

イ

ウ

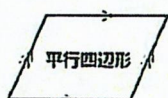
エ



イ

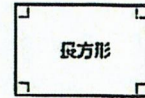
ウ

エ



ウ

エ

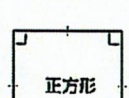


ア

イ

ウ

エ



ア

イ

ウ

エ



ア

イ

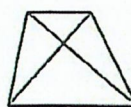
ウ

エ

- ③ となり合う辺が等しい。 ⑥ 1組の対辺が平行である。
④ 1つの角が直角である。 ⑤ もう1組の対辺も平行である。

トライ ①

台形に、対角線についての条件を加えて、特別な四角形にかえていくとき、その条件にあてはまるものを③～⑤より選びなさい。（*同じ記号をくり返し選んでもよい）

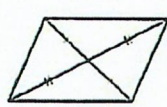


ア

イ

ウ

エ

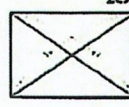


ア

イ

ウ

エ

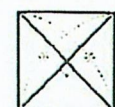


ア

イ

ウ

エ

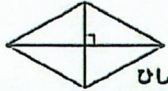


ア

イ

ウ

エ



ひし形

- ③ 対角線の長さが等しい。 ④ 対角線が垂直に交わる。 ⑤ 対角線がそれぞれの中点で交わる。

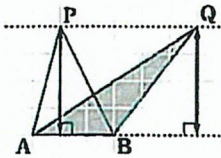
答え

- 基本学習 ▶ ア 対角
イ 平行四辺形
ウ 平行四辺形
基本 ▶ ア ③、④、⑤
イ ③、④、⑤
ウ ③、④、⑤
エ ③、④、⑤

ステップ 2 平行線と面積

基本学習

▼ 次の図で、 $\triangle PAB$ 、 $\triangle QAB$ の面積をそれぞれ求めなさい。



$$\triangle PAB = \frac{\text{底辺} \times \text{高さ}}{2} = \frac{3 \times 4}{2} = 6$$

$$\triangle QAB = \frac{\text{底辺} \times \text{高さ}}{2} = \frac{3 \times 4}{2} = 6$$

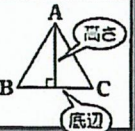
⇒ 底辺と高さが同じなら面積は等しい。

直線 PQ と辺 AB の関係は、PQ // AB である。

【参考】 $\triangle PAB$ と $\triangle QAB$ の面積が等しいとき、 $\triangle PAB = \triangle QAB$ と書く。

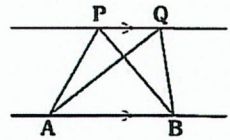
確認 三角形の面積

$$\triangle ABC = \frac{\text{底辺} \times \text{高さ}}{2}$$



ポイント

平行線と面積



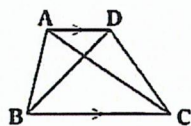
① PQ // AB ならば、 $\triangle PAB = \triangle QAB$

② $\triangle PAB = \triangle QAB$ ならば、PQ // AB

基本パターン (2)

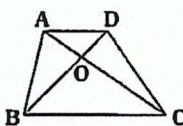
▼ 右の図で、AD // BC である台形 ABCD の対角線の交点を O とするとき、次の三角形と面積の等しい三角形はどれか。

1) $\triangle ABC$



答え $\triangle DBC$

2) $\triangle ABO$



AD // BC より、 $\triangle ABC$ と $\triangle DBC$ は高さが等しい

1) より、 $\triangle ABC = \triangle DBC$

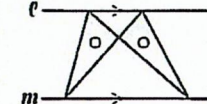
また、 $\triangle ABO = \triangle ABC - \triangle OBC$

$\triangle DCO = \triangle DBC - \triangle OBC$

よって、 $\triangle ABO = \triangle DCO$ である。



「台形の目」



上の図の2つの三角形で、

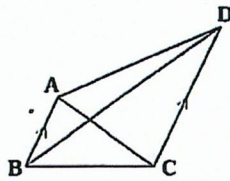
① 台形ならば、面積は等しい。

② 面積が等しいならば、 $l // m$ である。

ドライ 2

次の図で、それぞれの三角形と面積の等しい三角形はどれか、すべて答えなさい。

① AB // DC のとき、



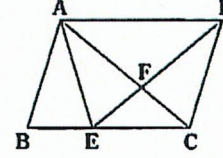
1) $\triangle ABC$

$\triangle ABD$

2) $\triangle ACD$

$\triangle BCD$

② $\square ABCD$



1) $\triangle ACD$

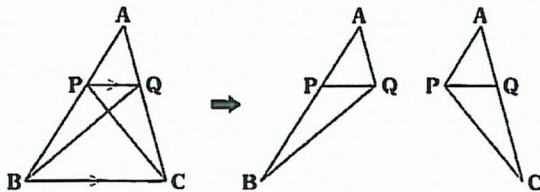
$\triangle AED, \triangle ABC$

2) $\triangle AEF$

$\triangle DCF$

ドライ 3

下の図のように、 $\triangle ABC$ の辺 BC に平行な直線と辺 AB、AC との交点をそれぞれ P、Q とする。このとき、 $\triangle ABQ = \triangle ACP$ であることを証明しなさい。



【証明】

PQ // BC より、底辺と高さが等しいから、

$$\triangle PBQ = \triangle QCP$$

また、 $\triangle ABQ = \triangle PBQ + \triangle APQ$

$$\triangle ACP = \triangle QCP + \triangle APQ$$

よって、 $\triangle ABQ = \triangle ACP$

答え

- 基本学習 ① 6
- ② 3
- ③ 4
- ④ 6
- ⑤ //
- 基本2 ① DBC
- ② DCO

ドライ④

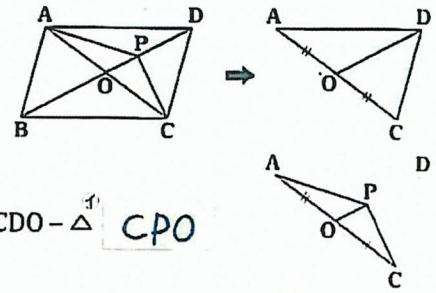
右の図の□ABCDで、対角線BD上に点Pをとる。このとき、 $\triangle ADP = \triangle CDP$ であることを証明しなさい。

【証明】 $OA = OC$ より、底辺の長さが等しいから、

$$\triangle ADO = \triangle CDO, \triangle APO = \triangle CPO$$

$$\text{また、} \triangle ADP = \triangle ADO - \triangle APO, \triangle CDP = \triangle CDO - \triangle CPO$$

$$\text{よって、} \triangle ADP = \triangle CDP$$



重要

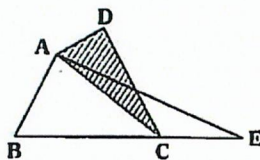
ステップ③

等積変形

図形の面積を変えずに、その形を変えることを等積変形という。

基本学習

右の図の四角形ABCDで、辺BCを延長した直線上に点Eをとる。 $\triangle ABE$ の面積が四角形ABCDの面積と等しくなるようにするには、点Eをどのような位置にとればよいか。



左の図で、 $\triangle ABE = \text{四角形} ABCD$ とする。

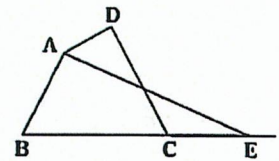
$$\text{また、} \triangle ABE = \triangle ABC + \triangle ACE$$

$$\text{四角形} ABCD = \triangle ABC + \triangle ACD \text{ より、}$$

$$\triangle ACE = \triangle ACD \text{ でなければならない。}$$

$$\text{よって、平行線と面積の性質より、} AC \parallel DE$$

点Dを通り、対角線ACに平行な直線をひき、BCの延長との交点をEとする。



基本パターン③

下の図で、四角形ABCDと面積が等しい $\triangle ABE$ を作図しなさい。

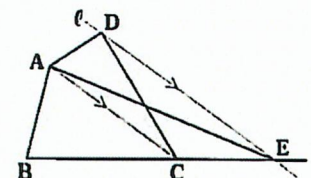
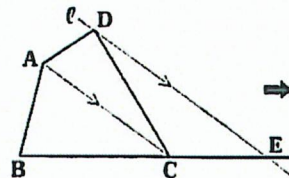
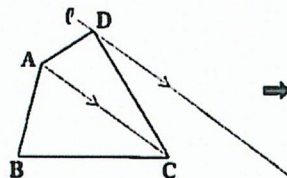
ポイント

等積変形の作図

① 頂点Dを通り、対角線ACに平行な直線ℓをひく。

② 直線ℓと辺BCの延長との交点をEとする。

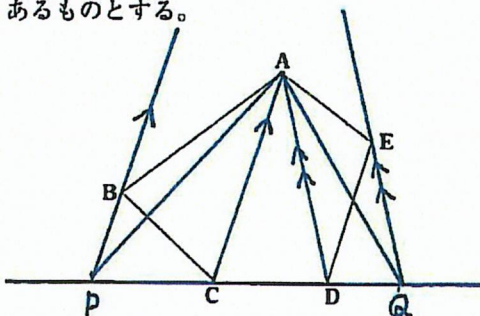
③ AとEを結ぶ。



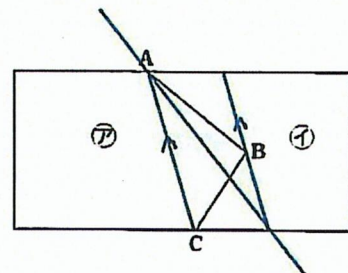
ドライ⑤

次の問いに答えなさい。

① 下の図で、五角形ABCDEと面積の等しい $\triangle APQ$ を作図しなさい。ただし、点P、Qは直線CD上にあるものとする。



② 下の図の長方形で、その面積が折れ線ABCで②、①の2つの部分に分かれている。②、①の面積を変えずに、点Aを通る直線で2つに分けるとき、その直線を作図しなさい。



答え 基本学習 ② ACD ③ DE

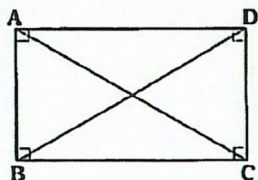
解けない問題がある時は P132 と P133 にむかって復習せよう。

練習問題



たくさん解いて、解き方を工夫したり、問題に慣れよう！

- 1 「長方形の対角線の長さは等しい。」
このことを、下の図の長方形 ABCD
で証明しなさい。 **ステップ 1**



【証明】 $\triangle ABC$ と $\triangle DCB$ において、

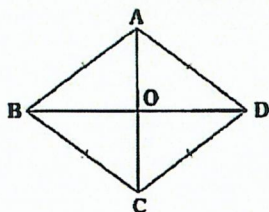
$$\begin{cases} \text{長方形の4つの角は等しいから、} \\ \angle ABC = \angle DCB = 90^\circ \dots (1) \\ \text{平行四辺形の対辺は等しいから、} AB = DC \dots (2) \\ \text{共通な辺だから、} BC = CB \dots (3) \end{cases}$$

(1), (2), (3) より、2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから、

$$\triangle ABC \equiv \triangle DCB$$

よって、 $AC = DB$ より、長方形の対角線の長さは等しい。

- 2 「ひし形の対角線は垂直に交わる。」
このことを、下の図のひし形
ABCD で証明しなさい。 **ステップ 1**



【証明】 $\triangle ABO$ と $\triangle ADO$ において、

$$\begin{cases} \text{ひし形の4つの辺は等しいから、} AB = AD \dots (1) \\ \text{平行四辺形の対角線はそれぞれの} \text{中点} \text{で交わるから、} \\ OB = OD \dots (2) \\ \text{共通な辺だから、} AO = AO \dots (3) \end{cases}$$

(1), (2), (3) より、3 辺 がそれぞれ等しいから、

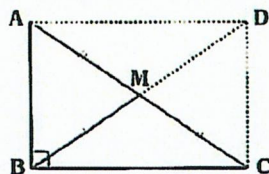
$$\triangle ABO \equiv \triangle ADO$$

よって、 $\angle AOB = \angle AOD$

また、 $\angle AOB + \angle AOD = 180^\circ$ より、 $\angle AOB = 90^\circ$

したがって、ひし形の対角線は垂直に交わる。

- 3 下の図の直角三角形 ABC で、斜辺 AC の
中点を M とすると、 $MA = MB = MC$ で
ある。このことを、BM の延長線上に
 $MB = MD$ となる点 D をとって証明しな
さい。 **ステップ 1**



【証明】

仮定より、 $MA = MC \dots (1)$, $MB = MD \dots (2)$

(1), (2) より、対角線がそれぞれの **中点** で交わるから、

四角形 ABCD は **平行四辺形** である。

また、仮定より、 $\angle ABC = 90^\circ$ だから、

1つの角が直角である平行四辺形となる。

よって、四角形 ABCD は **長方形** である。

長方形の **対角線** の長さは等しいから、 $AC = BD \dots (3)$

(1), (2), (3) より、 $MA = MB = MC$

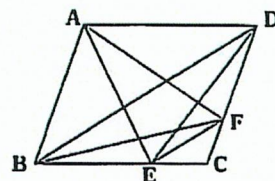
- 4 次のいろいろな四角形について、必ずあてはまる性質に○を書きなさい。 **基本 11**

	線対称で ある	2組の対辺 が等しい	4つの辺が 等しい	2組の対角 が等しい	4つの角が 等しい	対 角 線		
						中点で交わる	等しい	垂直に交わる
平行四辺形		○		○		○		
長方形	○	○		○	○	○	○	
ひし形	○	○	○	○		○		○
正方形	○	○	○	○	○	○	○	○

- 5 右の図の $\square ABCD$ で、辺 BC 、 CD 上に $BD \parallel EF$ となるように点 E 、 F をそれぞれとる。このとき、 $\triangle ABE$ と面積の等しくなる三角形をすべて答えなさい。

基本2

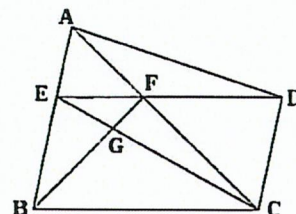
$$\triangle DBE, \triangle DBF, \triangle DAF$$



- 6 右の図の四角形 $ABCD$ で、 $AB \parallel DC$ 、 $ED \parallel BC$ である。このとき、次の三角形と面積の等しい三角形をすべて答えなさい。

ステップ2

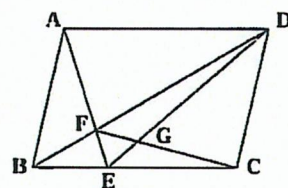
$$\begin{array}{lll} \textcircled{1} \triangle EBC & \textcircled{2} \triangle EBF & \textcircled{3} \triangle ABF \\ \triangle FBC & \triangle ECF & \triangle AEC \\ \triangle ECD & \triangle ADF & \triangle AED \\ \triangle ACD & & \end{array}$$



- 7 右の図の $\square ABCD$ で、辺 BC 上に点 E をとり、 AE と BD の交点を F 、 FC と ED の交点を G とする。このとき、 $\triangle DFE$ と面積が等しい三角形を2つ答えなさい。

ステップ2

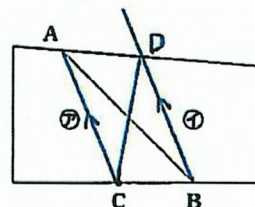
$$\triangle ABF, \triangle FBC$$



- 8 右の図のように、 AB を境界とする $\textcircled{7}$ 、 $\textcircled{4}$ の土地がある。この2つの土地の面積を変えずに、図の点 C を通る境界線 CD を作図しなさい。

基本3

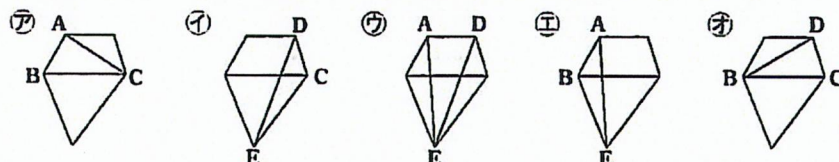
中上位クラスのみOK!



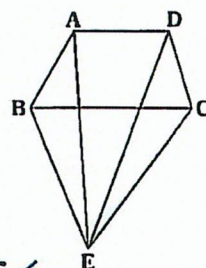
応用問題

さあ、チャレンジしてみよう！あきらめずに最後までトライ！

- 1 右の図のように、 $AD \parallel BC$ の台形 $ABCD$ があり、 $BE \parallel DC$ 、 $AB \parallel CE$ となる点を E とする。次の5つの図のうち、4つを用いて $\triangle ABE = \triangle DEC$ が成り立つことを示すとき、どのように並べるのが最も適当か。記号を順に並べて示しなさい。



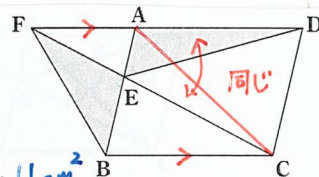
I, P, O, I



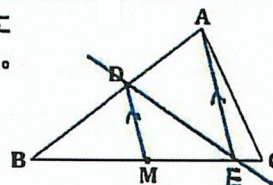
- 2 右の図は、 $\square ABCD$ の辺 AB 上に点 E をとり、 CE の延長と DA の延長との交点を F としたものである。このとき、次の問いに答えなさい。

① $\triangle FBE = \triangle ADE$ であることを証明しなさい。省略

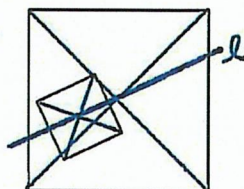
② $\square ABCD = 40\text{cm}^2$ 、 $\triangle FBE = 9\text{cm}^2$ であるとき、 $\triangle BEC$ の面積を求めなさい。11 cm^2



- 3 右の図の $\triangle ABC$ で、 D は辺 AB 上の点、 M は辺 BC の中点である。辺 BC 上に点 E をとり、2点 D 、 E を通る直線が $\triangle ABC$ の面積を2等分するようにしたい。直線 DE を作図しなさい。



- 4 右の図の灰色部分は、大きい正方形から小さい正方形を取りのぞいた部分を表している。正方形の対角線の交点を通る直線は、正方形の面積を2等分することを利用して、灰色部分の面積を2等分する直線 l を作図しなさい。



この単元は入試にばかりかありまう。きろん理解せましよう。

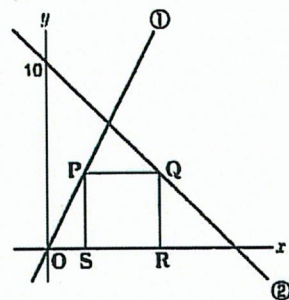
5. 1次関数と図形

ステップ ① 1次関数と正方形

発展パターン ①

この解まろは確実に身につけろあろう!

▼ 右の図のように、2直線 $y=2x$ ①, $y=-x+10$ ②がある。直線①上の x 座標が a である点を P とする。点 P を通り、 x 軸に平行な直線と直線②との交点を Q とし、点 Q , P から x 軸に下ろした垂線を QR , PS とする。四角形 $PQRS$ が正方形となるときの、 a の値を求めなさい。



- 点 P の x 座標は a だから、 $y=2x$ に $x=a$ を代入
 y 座標は、 $y=2a$
- 点 Q の y 座標も点 P と同じ $2a$ だから、
 点 Q の x 座標は、
 $2a = -x + 10$
 $x = -2a + 10$

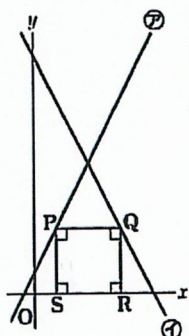
- 線分 PS の長さ $= 2a$
- 線分 PQ の長さ
 $= (\text{点 } Q \text{ の } x \text{ 座標}) - (\text{点 } P \text{ の } x \text{ 座標})$
 $= -2a + 10 - a$
 $= -3a + 10$

四角形 $PQRS$ が正方形となるのは
 $PS = PQ$ のときだから、
 $2a = -3a + 10$

$$a = 2$$

トライ ①

下の図のように、2直線 $y=2x+1$ ⑦, $y=-2x+11$ ⑧がある。直線⑦上の点 P の x 座標を a として、四角形 $PQRS$ が正方形となるときの、次の問いに答えなさい。



① a の値を求めなさい。

$$\begin{aligned} P(a, 2a+1) \\ Q(-a+5, 2a+1) \\ PS \text{ の長さ } 2a+1 \\ PQ \text{ の長さ } -2a+5 \end{aligned}$$

② 点 P の座標を求めなさい。

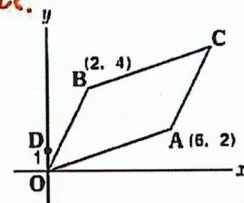
$$\begin{aligned} 2a+1 &= -2a+5 \\ 4a &= 4 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

$$P(1, 3)$$

ステップ ② 1次関数と平行四辺形

発展パターン ②

▼ 右の図のように、4点 $O(0, 0)$, $A(6, 2)$, $B(2, 4)$, C を頂点とする $\square OACB$ がある。このとき、次の問いに答えなさい。



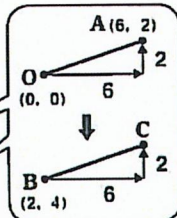
1) 点 C の座標を求めなさい。

平行四辺形だから、

$OA \parallel BC$, $OA = BC$ より、
 点 C の x 座標は、 $2 + 6 = 8$

$$y \text{ 座標は、} 4 + 2 = 6$$

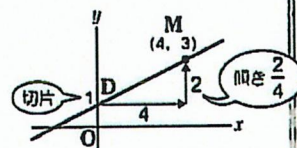
$$\text{答え } C(8, 6)$$



2) 点 $D(0, 1)$ を通り、 $\square OACB$ の面積を2等分する直線の式を求めなさい。

まず、 AB の中点 M を求める。求める直線 DM は

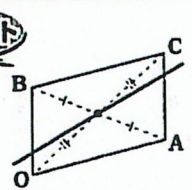
$$\begin{aligned} B(2, 4) \\ A(6, 2) \\ \text{中点 } M(4, 3) \end{aligned}$$



傾きが $\frac{1}{2}$, 切片が 1

$$\text{答え } y = \frac{1}{2}x + 1$$

ポイント



対角線の交点を通る直線は、平行四辺形の面積を2等分する。

ポイント

$$\text{中点は平均点!} \\ \left(\frac{2+6}{2}, \frac{4+2}{2} \right)$$

x 座標の平均 y 座標の平均

答え

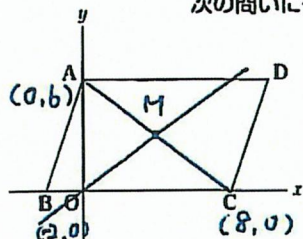
発展① ① $-3a+10$ ② 2

発展② ① 6 ② 6 ③ 4

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

トライ②

下の図のように、4点A(0, 6), B(-2, 0), C(8, 0), Dを頂点とする $\square ABCD$ がある。このとき、次の問いに答えなさい。



① 点Dの座標を求めなさい。

ABの傾きを利用する

$$D(10, 6)$$

② 原点を通り、 $\square ABCD$ の面積を2等分する直線の式を求めなさい。

ACの中点をMとすると

$$M\left(\frac{0+8}{2}, \frac{6+0}{2}\right)$$

$$M(4, 3) \text{ だから}$$

$$\text{求める式OMは } y = \frac{3}{4}x$$

やや難しい考え方だから、ここも大切な単元です。

ステップ③

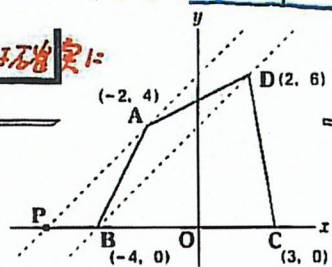
1次関数と等積変形

上位クラスの生徒には必ず使え

おさえておきましょう。

発展パターン③

▼ 右の図のように、4点A(-2, 4), B(-4, 0), C(3, 0), D(2, 6)を頂点とする四角形ABCDがある。x軸上の点Bより左側に点Pをとり、 $\triangle DPC$ と四角形ABCDの面積が等しくなるようにする。このとき、点Pの座標を求めなさい。



$$\bullet \text{ 四角形 } ABCD = \triangle DAB + \triangle DBC$$

$$\triangle DPC = \triangle DPB + \triangle DBC$$

よって、四角形ABCD = $\triangle DPC$ となる

には、 $\triangle DAB = \triangle DPB$ となればよい。

したがって、 $AP \parallel DB$ であればよい。

$$\bullet B(-4, 0), D(2, 6) \text{ より、直線 } DB \text{ の傾きは、 } \frac{6}{6} = 1$$

• 直線APの式を $y = ax + b$ とする。点Aを通り、傾きが1より、

$$\begin{matrix} 1 & A(-2, 4) \\ \downarrow & \swarrow \searrow \\ ax + b = y & \end{matrix}$$

$$1 \times (-2) + b = 4$$

$$b = 6$$

$$\text{よって、 } y = x + 6$$

点Pのy座標は0だから、

$$0 = x + 6$$

$$x = -6$$

$$\Rightarrow \text{答え } P(-6, 0)$$

ポイント

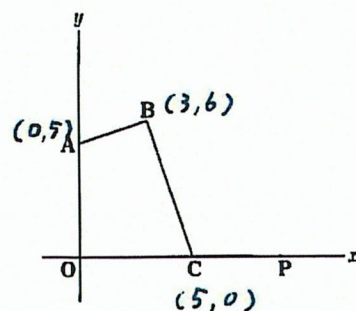
等積変形

点Aを通り、直線DBに平行な直線とx軸との交点をPとすると、

$$\triangle DAB = \triangle DPB$$

トライ③

右の図のように、4点O(0, 0), A(0, 5), B(3, 6), C(5, 0)を頂点とする四角形OABCがある。x軸上の点Cより右側に点Pをとり、 $\triangle OAP$ と四角形OABCの面積が等しくなるようにする。このとき、次の問いに答えなさい。



① 直線ACの傾きを求めなさい。

$$-1$$

② 点Bを通り、直線ACに平行な直線の式を求めなさい。

$$y = ax + b \text{ へ } a = -1 \text{ を代入}$$

$$6 = -3 + b$$

$$y = -x + b \text{ へ } B(3, 6) \text{ を代入}$$

$$b = 9$$

$$\therefore y = -x + 9$$

③ 点Pの座標を求めなさい。

点Pは②上にあるから

$$P(9, 0)$$

答え

発展③ ① 6

② -6

③ -6

よく考える。何をどうすればよいかを身に付けよう。

練習問題



たくさん解いて、解き方を工夫したり、問題に慣れよう！

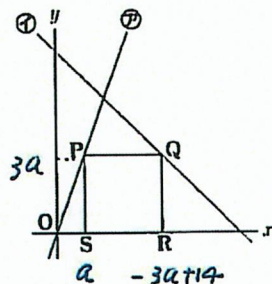
- 1** 右の図のように、2直線 $y=3x \cdots \textcircled{2}$ 、 $y=-x+14 \cdots \textcircled{1}$ がある。直線 $\textcircled{2}$ 上の x 座標が a である点を P とする。点 P を通り、 x 軸に平行な直線と直線 $\textcircled{1}$ との交点を Q とし、点 Q 、 P から x 軸に下ろした垂線を QR 、 PS とする。四角形 $PQRS$ が正方形となるときの、次の問いに答えなさい。 発展1

① a の値を求めなさい。

② 点 P の座標を求めなさい。

$$a=2$$

$$(2, 6)$$



- 2** 右の図で、直線 $y=-\frac{2}{5}x+7$ 上の x 座標が a である点 P から x 軸、 y 軸に垂線をひき、その交点をそれぞれ Q 、 R とする。四角形 $PQOR$ が正方形となるときの、点 P の座標を求めなさい。 発展1

P の x 座標を a とすると

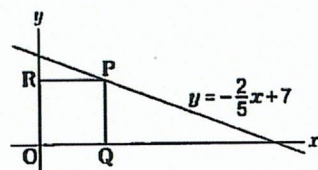
$$P(a, -\frac{2}{5}a+7)$$

$$PR=PQより$$

$$a = -\frac{2}{5}a+7$$

$$a=5$$

$$よって P(5, 5)$$



- 3** 右の図のように、直線 $y=2x \cdots \textcircled{2}$ 、 $y=ax+6 \cdots \textcircled{1}$ がある。直線 $\textcircled{2}$ 上の点 P を通り、 x 軸に平行な直線と直線 $\textcircled{1}$ との交点を Q とし、点 Q 、 P から x 軸に下ろした垂線を QR 、 PS とする。点 S の x 座標が 2 で、四角形 $PQRS$ が正方形となるときの、 a の値を求めなさい。 発展1

P の座標は $(2, 4)$

$PS=SR$ となる

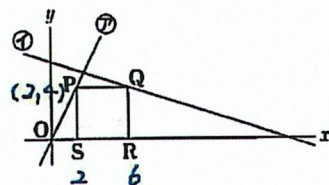
R の座標は $(6, 0)$

Q の座標は $(6, 4)$ とわかる

Q は $\textcircled{1}$ の上にあるから

$$4 = 6a+6$$

$$a = -\frac{1}{3}$$



- 4** 右の図のように、3点 $O(0, 0)$ 、 $A(6, 0)$ 、 $B(2, 4)$ があり、 $\triangle OAPB$ となるように点 P をとる。このとき、次の問いに答えなさい。 発展2

① 点 P の座標を求めなさい。

$$(8, 4)$$

② 直線 $y=-2x+b$ が $\triangle OAPB$ の面積を2等分するとき、 b の値を求めなさい。

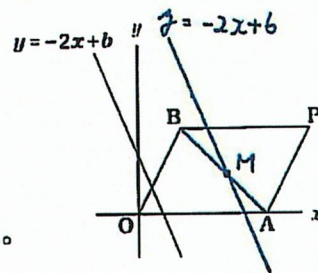
AB の中点 M の座標は

$$(4, 2)$$

M は $y=-2x+b$ 上にあるから

$$2 = -8+b$$

$$b=10$$



- 5** 右の図のように、4点 $A(0, 5)$ 、 B 、 $C(8, 1)$ 、 $D(6, 5)$ を頂点とする $\square ABCD$ と、原点を通る直線 $y=ax$ がある。このとき、次の問いに答えなさい。 発展2

① 点 B の座標を求めなさい。

$$(2, 1)$$

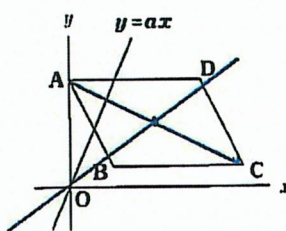
② 直線 $y=ax$ が $\square ABCD$ の面積を2等分するとき、 a の値を求めなさい。

AC の中点は

$$(4, 3)$$

よって $y=ax$ は $y=\frac{3}{4}x$

$$つまり a = \frac{3}{4}$$



- 6** 右の図のように、2直線 $y=\frac{3}{2}x \cdots \textcircled{2}$ 、 $y=\frac{1}{2}x+2 \cdots \textcircled{1}$ がある。Aは直線 $\textcircled{2}$ 上の点、Bは直線 $\textcircled{1}$ 上の点で、A、Bの x 座標は等しい。また、Cは直線 $\textcircled{1}$ と y 軸との交点で、Pは直線 $\textcircled{2}$ 、 $\textcircled{1}$ の交点である。このとき、次の問いに答えなさい。 発展2

① 点 P の座標を求めなさい。

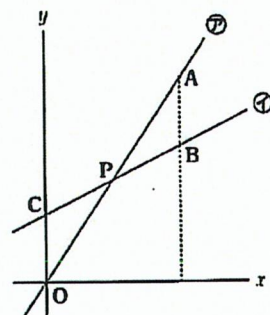
$$(2, 3)$$

② $\triangle ACOB$ となるときの、点 B の座標を求めなさい。

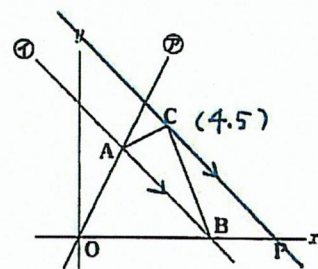
$$(4, 4)$$

③ ②のとき、点 $(0, 4)$ を通り、 $\triangle ACOB$ の面積を2等分する直線の式を求めなさい。

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$



- 7 右の図のように、2直線 $y=2x \cdots \textcircled{2}$, $y=-x+6 \cdots \textcircled{1}$ が点Aで交わっている。直線 $\textcircled{1}$ と x 軸との交点をBとし、点Cの座標は(4, 5)である。 x 軸上の正の部分に点Pをとり、 $\triangle AOP$ と四角形AOBCの面積が等しくなるようにするとき、次の問いに答えなさい。 **【発展】**



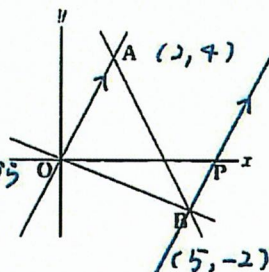
① 点Cを通り、直線 $\textcircled{1}$ と平行な直線の式を求めなさい。

② 点Pの座標を求めなさい。

$$y = -x + 9$$

$$P(9, 0)$$

- 8 右の図のように、3つの直線が、原点O、点A(2, 4)、点B(5, -2)で交わっている。 x 軸上の正の部分に点Pをとり、 $\triangle AOB$ と $\triangle AOP$ の面積が等しくなるようにするとき、点Pの座標を求めなさい。 **【発展】**



$$\triangle AOB = \triangle AOP \text{ のとき}$$

$$AO \parallel PB \quad \frac{4}{2} = 2$$

Pの座標はOから

$$AO \parallel PB$$

$$BP \text{ の式 } y = ax + b \text{ とすると}$$

$$P(6, 0)$$

$$y = 2x - 12$$

- 9 右の図のように、3点A(2, 8)、B(0, 6)、C(6, 0)がある。このとき、次の問いに答えなさい。 **【ステップ】**

① x 軸上の正の部分に点Pをとり、 $\triangle BOP$ と四角形ABOCの面積が等しくなるようにするとき、点Pの座標を求めなさい。 (10, 0)

やや難

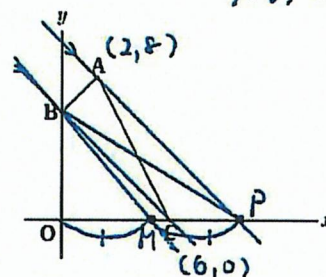
② 点Bを通り、四角形ABOCの面積を2等分する直線の式を求めなさい。

DPの中点をMとすると

よ、BMは

$$\triangle BOM = \frac{1}{2} \triangle BOP = \frac{1}{2} \text{ 四角形ABOC}$$

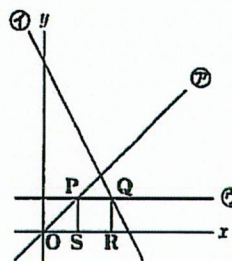
$$y = -\frac{6}{5}x + 6$$



応用問題

さあ、チャレンジしてみよう!! あきらめずに最後までトライ!!

- ① 右の図のように、3直線 $y=x \cdots \textcircled{2}$, $y=-2x+12 \cdots \textcircled{1}$, $y=k \cdots \textcircled{3}$ がある。直線 $\textcircled{2}$ と直線 $\textcircled{1}$, $\textcircled{1}$ との交点をそれぞれP, Qとし、2点P, Qからそれぞれ x 軸に垂線PS, QRをひく。四角形PQRSが正方形となるとき、 k の値を求めなさい。ただし、 $0 < k < 4$ とする。



$$PS = k$$

$$\text{よ、} PQ = -\frac{3}{2}k + 6$$

$$Q \text{ の } x \text{ 座標は } x = -\frac{1}{2}k + 6$$

$$PS = PQ \text{ より}$$

$$k = \frac{12}{5}$$

- ② 右の図のように、2直線 $y=x+1 \cdots \textcircled{2}$, $y=3x-3 \cdots \textcircled{1}$ が点Aで交わっている。また、点Bの座標を(4, -1)とすると、次の問いに答えなさい。

① 点Aの座標を求めなさい。 (2, 3)

やや難

② 直線 $\textcircled{2}$ 上に点C、直線 $\textcircled{1}$ 上に点Dをとり、 $\square ABCD$ となるようにするとき、2点C, Dの座標を求めなさい。ただし、2点C, Dの x 座標は正であるものとする。

$$y = 3x - 13$$

(より、Dの座標は

$$BC \text{ の式 } y = ax + b \text{ とし}$$

よ、

$$BC \text{ と } \textcircled{2} \text{ の交点は } C(7, 8)$$

$$D(5, 12)$$

- ③ 右の図のように、3点A(3, 7)、B(0, 4)、C(8, 0)を頂点とする $\triangle ABC$ と、辺AB上の点P(2, 6)がある。直線PQが $\triangle ABC$ の面積を2等分するとき、次の問いに答えなさい。

① 辺BCの中点Mの座標を求めなさい。

② 直線AQの傾きを求めなさい。 (0, 4)

$$(4, 2)$$

$$-2$$

③ 点Qの座標を求めなさい。

$$(6, 1)$$

