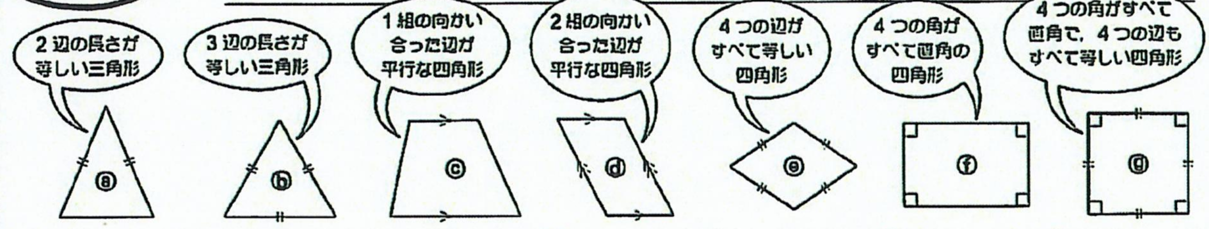
V 図形の性質

■ いろいろな三角形・四角形

次の図形の名前を書きなさい。また，中１で学習したことを思い出し，後の問いに答えなさい。



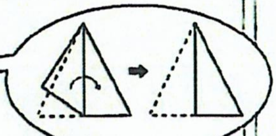
二等辺三角形　㋐ 正三角形　㋑ 台形　㋒ 平行四辺形　㋓ ひし形　㋔ 長方形　㋕ 正方形

● 線対称な図形をすべて選び，記号ⓐ～ⓖで答えなさい。　答え ㋖ a, b, e, f, g

確認　中１で学習した，線対称な図形

１つの直線を折り目にして折ったとき，両側の部分がぴったりと重なり合う図形を線対称な図形といい，折り目にした直線を対称の 軸 という。

● 二等辺三角形を折り返して重ねてみよう。どんなことがわかるかな。



両側の２つの角がぴったりと重なった。

↓

二等辺三角形は２つの角が等しくなることがわかる。

とても大切

これから学習する，図形の性質

「２辺が等しい三角形を二等辺三角形という」などのように，ことばの意味をはっきり述べたものを定義（ていぎ）という。また，「二等辺三角形は２つの角が等しくなる」などのように，証明されたことがらのうちで，基本となる図形の性質のことを定理という。定理は図形の証明をするときの根拠としてよく使われる。

１．二等辺三角形

ステップ ① 二等辺三角形の性質

二等辺三角形で

長さの等しい２辺の間の角を頂角（ちょうかく），

頂角に向かい合う辺を底辺（ていへん），

底辺の両端の角を底角（ていかく）という。

大切

二等辺三角形

ポイント

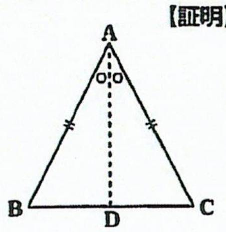
【定義】　２辺が等しい三角形を二等辺三角形という。

【定理】 ❶　二等辺三角形の２つの底角は等しい。

❷　二等辺三角形の頂角の二等分線は，底辺を垂直に２等分する

基本学習

▼ ポイントの【定理】❶を証明しなさい。



【証明】 AB＝AC である二等辺三角形 ABC で，頂角∠A の二等分線と底辺 BC との交点を D とする。

このとき，△ABD と△ACD において，

仮定より，AB＝㋐ AC …①，∠BAD＝∠㋑ CAD …②

共通な辺だから，AD＝AD …③

（二等辺三角形 ABC）　（AD は∠A の二等分線）

①，②，③より，㋒ 2組の辺とその間の角 がそれぞれ等しいから，△ABD ≡ △ACD

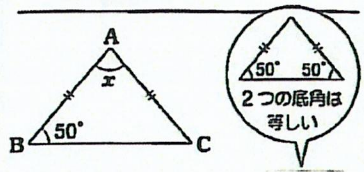
よって，対応する角の大きさは等しいから，∠B＝∠C

答え　わかるかな?　㋐ 正三角形　㋑ 台形　㋒ 平行四辺形　㋓ ひし形　㋔ 長方形　㋕ 正方形　㋖ ⓐ，ⓑ，ⓔ，ⓕ，ⓖ　確認 軸　基本学習 ㋐ AC　㋑ CAD　㋒ ２組の辺とその間の角

このパターンはおさえておこう！

基本パターン①

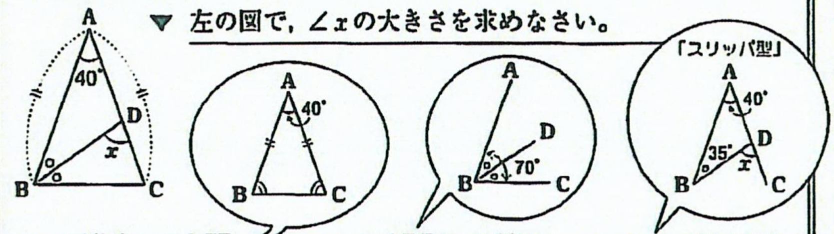
▼ 下の図で，$\angle x$ の大きさを求めなさい。



$\angle x = 180° - 50° \times 2 =$ 80 °

発展パターン①

▼ 左の図で，$\angle x$ の大きさを求めなさい。

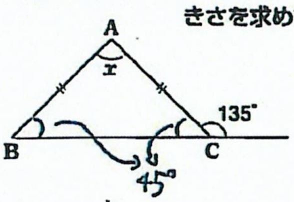


● $\angle ABC = \angle ACB$ 　● $\angle ABD = \angle CBD$ 　● $\angle x = 40° + 35°$

$= \dfrac{180° - 40°}{2} =$ ㋐ 70 °　$= \dfrac{70°}{2} =$ ㋑ 35 °　$=$ ㋒ 75 °

トライ①

下の図で，$\angle x$ の大きさを求めなさい。



$x = 90°$

トライ②

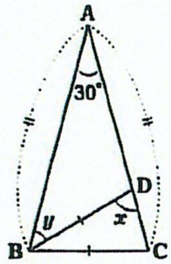
右の図で，$\angle x$，$\angle y$ の大きさを求めなさい。

$\angle BDC = \angle ACB$ だから

$\angle ACB = (180° - 30°) \div 2 = 75° \cdots \angle x$

$\angle y = \angle x - 30°$

$= 75° - 30° = 45° \cdots \angle y$



ステップ② 二等辺三角形になるための条件

おさえておこう！

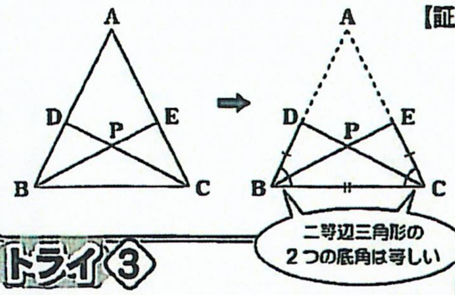
ポイント 二等辺三角形になるための条件

① 2辺が等しい三角形は，二等辺三角形である。【定義】

② 2つの角が等しい三角形は，二等辺三角形である。

基本パターン②

▼ 下の図のように，AB = AC である二等辺三角形 ABC がある。BD = CE のとき，△PBC は二等辺三角形であることを証明しなさい。



【証明】 △DBC と △ECB において，

仮定より，　BD = ㋐ CE 　…①

共通な辺だから，　BC = CB 　…②

AB = AC より，$\angle$DBC = $\angle$ ㋑ ECB 　…③

①，②，③より，㋒ 2組の辺とその間の角 がそれぞれ等しいから，

△DBC ≡ △ECB

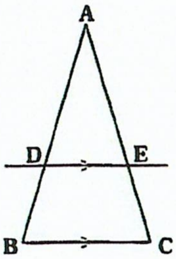
よって，$\angle$DCB = $\angle$EBC

つまり，$\angle$PCB = $\angle$ ㋓ PBC より，

2つの角が等しい から，△PBC は二等辺三角形である。

トライ③

下の図のように，AB = AC である二等辺三角形があり，底辺 BC に平行な直線が辺 AB，AC と交わる点をそれぞれ D，E とする。このとき，△ADE は二等辺三角形である。図の中に，等しい辺や角に同じ印をつけ，このことを証明しなさい。



【証明】

AB = AC より，$\angle$ABC = $\angle$ ㋐ ACB 　…①

DE // BC より，㋑ 同位 角は等しいから，$\angle$ADE = $\angle$ABC，$\angle$AED = $\angle$ ㋒ ACB 　…②

①，②より，$\angle$ADE = $\angle$ ㋒ AED

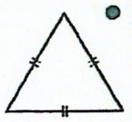
よって，㋓ 2つの角 が等しいから，△ADE は二等辺三角形である。

答え　基本① 80　発展① ㋐ 70　㋑ 35　㋒ 75　基本② ㋐ CE　㋑ ECB　㋒ 2組の辺とその間の角　㋓ PBC

ステップ 3 正三角形の性質

正三角形は二等辺三角形の特別なものであり，正三角形は二等辺三角形であるともいえる。

大切　ポイント



● **正三角形の性質**

【定義】 3 辺が等しい三角形を正三角形という。

【定理】 正三角形の 3 つの角は等しく，60°である。

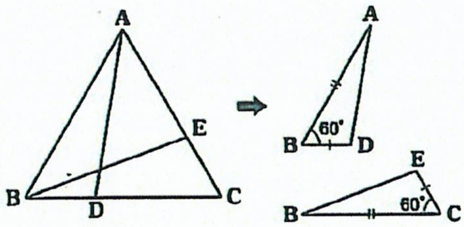
● **正三角形になるための条件**

❶ 3 辺が等しい三角形は，正三角形である。【定義】

❷ 3 つの角が等しい三角形は，正三角形である。

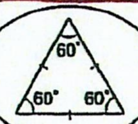
基本パターン 3

▼ 下の図の正三角形 ABC で，BD = CE ならば，AD = BE となることを証明しなさい。



【証明】 △ABD と△BCE において，

△ABC は正三角形 だから，



AB = ㋐ BC …①，∠ABD = ∠BCE = ㋑ 60 °…②

仮定より，BD = CE …③

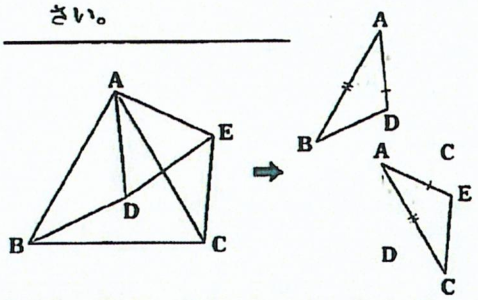
①，②，③より，㋒ 2組の辺とその間の角 がそれぞれ等しいから，

△ABD ≡ △BCE

よって，対応する ㋓ 辺の長さ は等しいから，AD = ㋔ BE

発展パターン 2

▼ 下の図で，△ABC，△ADE は，ともに正三角形である。このとき，BD = CE であることを証明しなさい。



【証明】 △ABD と△ACE において，

△ABC，△ADE は正三角形 だから，

AB = ㋐ AC …①，AD = ㋑ AE …②

また，∠BAC = ∠DAE = 60° だから，

∠BAD = 60° − ∠DAC

∠CAE = 60° − ∠ ㋒ DAC

このような方法はよく使われるので，しっかり慣れよう

よって，∠BAD = ∠CAE …③

①，②，③より，㋓ 2組の辺とその間の角 がそれぞれ等しいから，

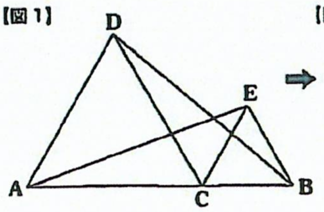
△ABD ≡ △ACE

よって，対応する辺の長さは等しいから，BD = CE

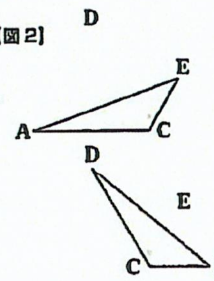
トライ 4

下の図 1 のように，線分 AB 上に点 C をとり，AC，CB をそれぞれ 1 辺とする正三角形 ACD と正三角形 CBE をつくるとき，AE = DB である。図 2 の中に，等しい辺や角に同じ印をつけ，このことを証明しなさい。

【図 1】



【図 2】



【証明】 △ACE と△DCB において

△ACD，△CBE は ㋐ 正三角形 だから，

AC = ㋑ DC …①，CE = ㋒ CB …②

また，∠ACD = ∠ECB = ㋓ 60 °だから，

∠ACE = 60° + ∠DCE，∠DCB = ㋔ 60 ° + ∠ ㋕ DCE

よって，∠ACE = ∠ ㋖ DCB …③

①，②，③より，㋗ 2組の辺とその間の角 がそれぞれ等しいから，

△ACE ≡ △DCB

よって，㋘ AE = ㋙ DB

答え　基本3　㋐ BC　㋑ 60　㋒ 2 組の辺とその間の角　㋓ 辺の長さ　㋔ BE

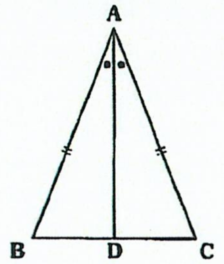
発展2　㋐ AC　㋑ AE　㋒ DAC　㋓ 2 組の辺とその間の角

二等辺三角形と正三角形の特徴をきちんとつかんでおこう！

練習問題

たくさん解いて，解き方を工夫したり，問題に慣れよう！

1 下の図で，AB＝AC の二等辺三角形の ∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とする。このとき，二等辺三角形の定理である「二等辺三角形の頂角の二等分線は，底辺を垂直に 2 等分する」ということを証明しなさい。 ステップ1



【証明】△ABD と △ACD において，

仮定より，　AB＝(ア) AC　…①

∠BAD＝∠(イ) CAD　…②

共通な辺だから，AD＝AD　…③

①，②，③より，(ウ) 2組の辺とその間の角 がそれぞれ等しいから，

△ABD ≡ △ACD

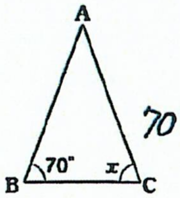
よって，BD＝(エ) CD，∠ADB＝∠(オ) ADC

また，∠ADB＋∠ADC＝(カ) 180°だから，

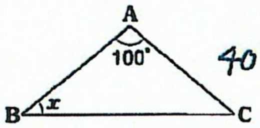
∠ADB＝∠ADC＝(キ) 90°

したがって，二等辺三角形の頂角の二等分線は，底辺を垂直に 2 等分する。

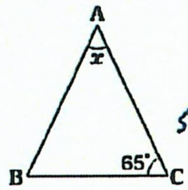
2 次の図で，AB＝AC のとき，∠x の大きさを求めなさい。 基本1

① 

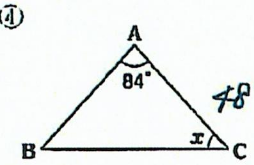
70°

② 

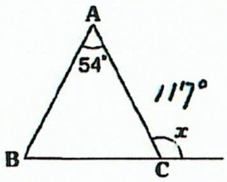
40°

③ 

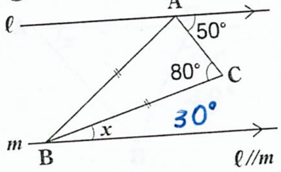
50°

④ 

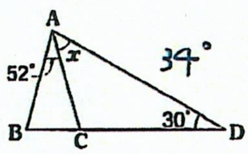
48°

⑤ 

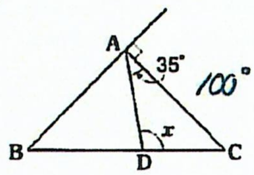
117°

⑥ 

30°

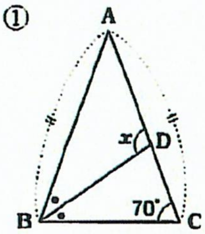
⑦ 

34°

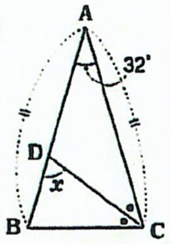
⑧ 

100°

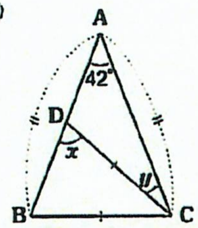
3 次の図で，∠x，∠y の大きさを求めなさい。 発展1

① 

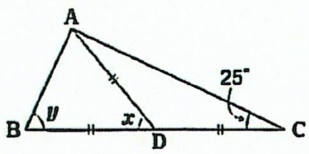
∠x＝105°

② 

∠x＝69°

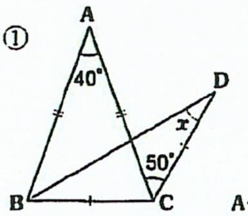
③ 

∠x＝69°，∠y＝27°

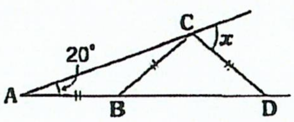
④ 

∠x＝50°，∠y＝65°

4 次の図で，∠x の大きさを求めなさい。 発展1

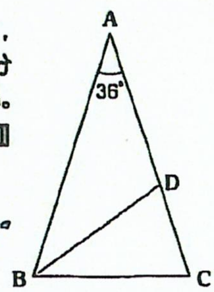
① 

30°

② 

60°

5 右の図の△ABC で，∠A＝36°，AB＝AC，BD は ∠B の二等分線のとき，次の問いに答えなさい。 発展1



① 次の角の大きさを求めなさい。

1) ∠ACB　72°　2) ∠CBD　36°

3) ∠BDC　72°

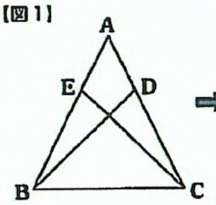
② BC と等しい線分をすべて答えなさい。

BD，AD

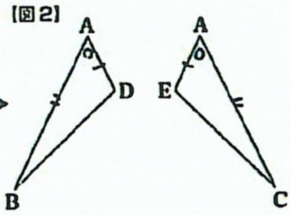
証明問題は解き方のパターンが限られています。

6 下の図１のように，AB＝ACである二等辺三角形ABCの辺AC，AB上に，AD＝AEとなるようにそれぞれ点D，Eをとるとき，BD＝CEであることを証明しなさい。（図２の中に，等しい辺や角に同じ印をつけて考えなさい。） ステップ１

【図１】



【図２】



【証明】△ABDと△ACEにおいて，

仮定より，　AB＝㋐ AC　…①

AD＝㋑ AE　…②

共通な角だから，∠BAD＝∠㋒ CAE　…③

①，②，③より，㋓ 2組の辺とその間の角 がそれぞれ等しいから，

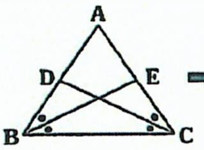
△ABD≡△㋔ ACE

よって，対応する㋕ 辺の長さは等しいから，

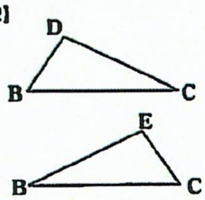
BD＝㋖ CE

7 下の図１のように，AB＝ACである二等辺三角形ABCがある。∠B，∠Cの二等分線をそれぞれBE，CDとするとき，△DBC≡△ECBであることを証明しなさい。（図２の中に，等しい辺や角に同じ印をつけて考えなさい。） ステップ１

【図１】



【図２】



【証明】△DBCと△㋐ ECB において，

AB＝ACより，∠DBC＝∠㋑ ECB　…①

共通な辺だから，　BC＝㋒ CB　…②

仮定より，∠DCB＝$\frac{1}{2}$∠ECB

∠EBC＝$\frac{1}{2}$∠㋓ DBC

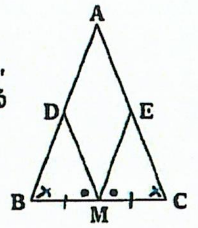
①より，∠DCB＝∠㋔ EBC　…③

①，②，③より，㋕ 1組の辺とその両端の角 がそれぞれ等しいから，

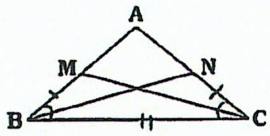
△DBC≡△㋖ ECB

8 右の図のように，AB＝ACである二等辺三角形ABCで，底辺BCの中点をMとする。また，辺AB，AC上に∠BMD＝∠CMEとなるようにそれぞれ点D，Eをとる。このとき，MD＝MEであることを証明しなさい。 ステップ１

右図参照

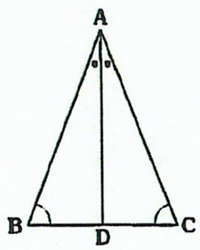


9 右の図のように，AB＝ACである二等辺三角形ABCで，辺AB，ACの中点をそれぞれM，Nとする。このとき，∠MCB＝∠NBCであることを証明しなさい。 ステップ１



右図参照

10 下の図のように，∠B＝∠Cである△ABCがある。∠Aの二等分線と辺BCとの交点をDとするとき，「２つの角が等しい三角形は，二等辺三角形である。」ことを証明しなさい。 ステップ２



【証明】△ABDと△ACDにおいて，

仮定より，∠B＝∠C　…①，∠BAD＝∠㋐ CAD　…②

また，∠ADB＝180°－∠B－∠BAD

∠ADC＝180°－∠C－∠㋑ CAD

①，②より，∠ADB＝∠㋒ ADC　…③

共通な辺だから，AD＝AD　…④

②，③，④より，㋓ 1組の辺とその両端の角 がそれぞれ等しいから，

△ABD≡△㋔ ACD

よって，対応する㋕ 辺の長さ は等しいから，

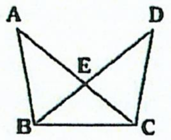
AB＝㋖ AC

したがって，２つの角が等しい三角形は，二等辺三角形である。

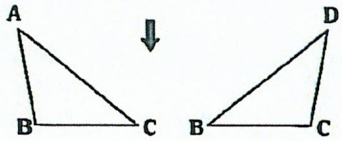
1つ1つの解き方をきちんとおさえておきましょう。

11 下の図1で，ACとDBの交点をEとする。このとき，AB＝DC，AC＝DBならば，△EBCは二等辺三角形であることを証明しなさい。(図2の中に，等しい辺や角に同じ印をつけて考えなさい。) 基本2

【図1】



【図2】



【証明】△ABCと△(ア) DCB において，

仮定より，AB＝(イ) DC …①，AC＝(ウ) DB …②
共通な辺だから，BC＝(エ) CB …③

①，②，③より，(オ) 3辺 がそれぞれ等しいから，

△ABC≡△(カ) DCB

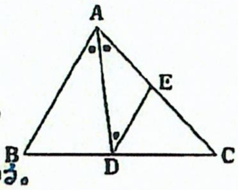
よって，対応する(キ) 角の大きさ は等しいから，

∠ACB＝∠(ク) DBC

つまり，∠ECB＝∠(ケ) EBC より，

(コ) 2つの角 が等しいから，△EBCは二等辺三角形である。

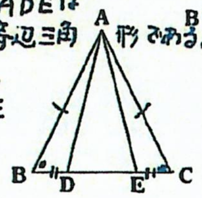
12 右の図のように，△ABCの∠Aの二等分線と辺BCとの交点をDとする。Dを通り，辺ABに平行な直線と辺ACとの交点をEとする。このとき，△ADEは二等辺三角形であることを証明しなさい。 基本2



仮定より ∠BAD＝∠EAD
AB // ED より錯角は等しいから
∠BAD＝∠EDA
よって ∠EAD＝∠EDA
2つの角が等しいから
△ADEは二等辺三角形である。

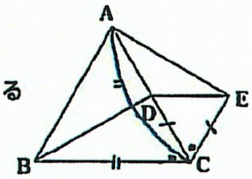
13 右の図のように，AB＝ACである二等辺三角形ABCの底辺BC上に，BD＝CEとなるように点D，Eをとる。このとき，△ADEは二等辺三角形であることを証明しなさい。 基本2

右図参照



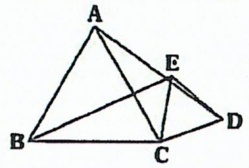
14 右の図で，△ABC，△DCEはともに正三角形である。このとき，△BCD≡△ACEであることを証明しなさい。 基本3

右図参照

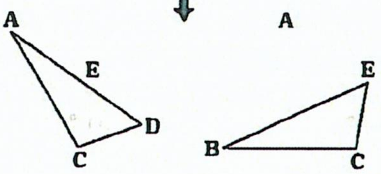


15 下の図1で，△ABC，△ECDが正三角形であるとき，AD＝BEとなることを証明しなさい。(図2の中に，等しい辺や角に同じ印をつけて考えなさい。) 発展2

【図1】



【図2】



【証明】△ACDと△(ア) BCE において，

△ABC，△ECDは(イ) 正三角形 だから，

AC＝(ウ) BC …①，CD＝(エ) CE …②

また，∠ACB＝∠ECD＝(オ) 60 °だから，

∠ACD＝60°＋∠(カ) ACE

∠BCE＝(キ) 60 °＋∠(ク) ACE

よって，∠ACD＝∠(ケ) BCE …③

①，②，③より，(コ) 2組の辺とその間の角 がそれぞれ等しいから，

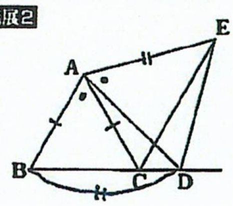
△ACD≡△(サ) BCE

よって，対応する辺の長さは等しいから，

AD＝(シ) BE

16 下の図の△ABCと△ADEはともに正三角形で，点Dは辺BCの延長上にある。このとき，△ABD≡△ACEであることを証明しなさい。 発展2

右図参照

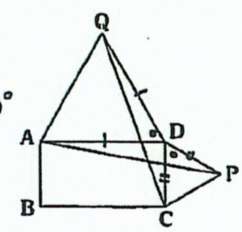


17 下の図のように，長方形ABCDの辺AD，CDを1辺とする正三角形QADとPDCがある。
このとき，次の問いに答えなさい。 発展2

① ∠CDQの大きさを求めなさい。 150°

② △CDQ≡△PDAであることを証明しなさい。

右図参照

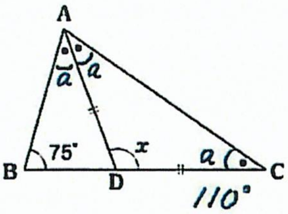


上位クラスだけでOKです。 1つ1つをていねいに考えてみよう。

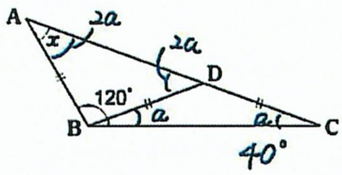
応用問題

さあ，チャレンジしてみよう！あきらめずに最後までトライ！

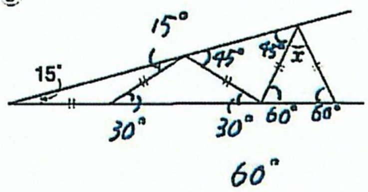
1 次の図で，$\angle x$ の大きさを求めなさい。

①


110°

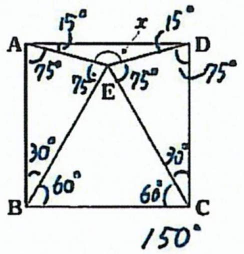
②


40°

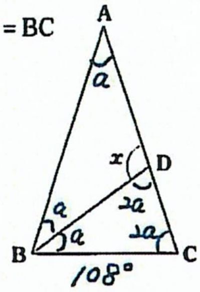
③


60°

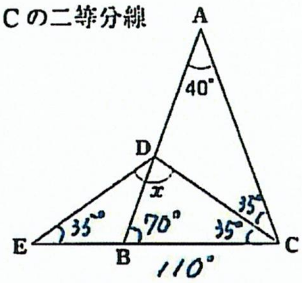
2 次の図で，$\angle x$ の大きさを求めなさい。

① 四角形ABCDは正方形
△EBCは正三角形


150°

② AB = AC
AD = BD = BC


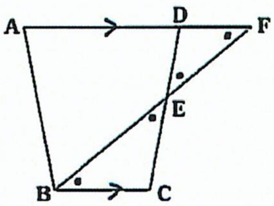
108°

③ AB = AC，BD = BE
CDは∠Cの二等分線


110°

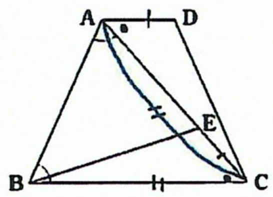
3 下の図のように，AD∥BCの台形ABCDがある。この台形の辺DC上にBC = CEとなるように点Eをとり，BEの延長とADの延長との交点をFとする。このとき，DE = DFであることを証明しなさい。

右図参照



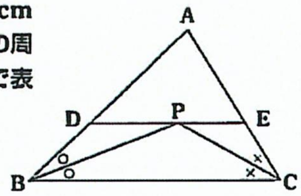
4 下の図のように，AD∥BCの台形ABCDがある。また，∠CAB = ∠CBAで，この台形の対角線AC上にAD = CEとなるように点Eをとる。このとき，CD = BEとなることを証明しなさい。

右図参照



5 下の図のように，△ABCの∠B，∠Cの二等分線の交点をPとし，Pを通りBCに平行な直線とAB，ACとの交点をD，Eとする。
AB = a cm，AC = b cmとするとき，△ADEの周の長さを，a，b の式で表しなさい。

$a+b$ (cm)

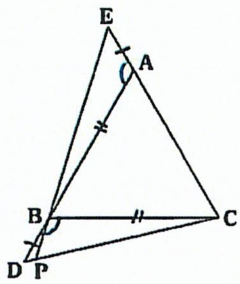


6 下の図の△ABCは正三角形である。D，Eはそれぞれ辺AB，CAの延長上に，BD = AEとなるようにとった点で，PはEBの延長とDCとの交点である。このとき，次の問いに答えなさい。

① △AEBと合同な三角形を答えなさい。 △BDC

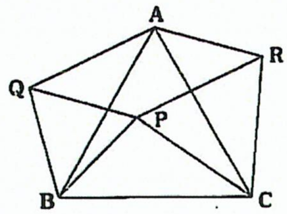
② ①で答えた合同な2つの三角形を利用して，∠BPC = 60°となることを証明しなさい。

右図参照



7 やや難

下の図のように，正三角形ABCの内部に点Pをとり，PBを1辺とする正三角形QBPと，PCを1辺とする正三角形RPCをつくる。次に，点AとQ，点AとRをそれぞれ結ぶ。このとき，後の問いに答えなさい。



① △PBCと合同な三角形を2つ答えなさい。
△QBA　△RAC

② 図の中に，点と点を結んで線分を1本ひくと，①以外に1組の合同な三角形ができる。それはどれとどれか，記号を使って答えなさい。

△AQPと△PRA または △AQRと△PRQ