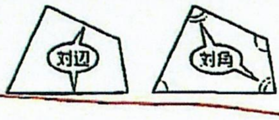
平行四辺形の証明問題は知識として身につけておくと役立ちます。

3．平行四辺形

ステップ 1 平行四辺形の性質

四角形の向かい合う辺を対辺，向かい合う角を対角という。

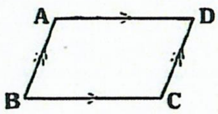


定義と定理の違いを確認しておこう

ポイント 平行四辺形

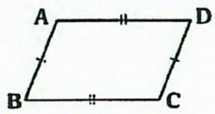
【定義】

2組の対辺がそれぞれ平行な四角形を平行四辺形という。



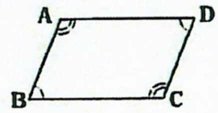
【定理】平行四辺形の定義から，次の性質が導かれる。

❶ 2組の対辺はそれぞれ等しい。



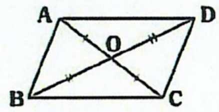
AB＝DC，AD＝BC

❷ 2組の対角はそれぞれ等しい。



∠A＝∠C，∠B＝∠D

❸ 対角線はそれぞれの中点で交わる。

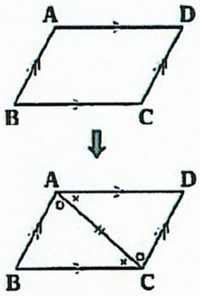


OA＝OC，OB＝OD

参考 平行四辺形ABCDを▱ABCDと書くことがある。

基本学習 平行四辺形の性質の証明

▼「平行四辺形 の 2組の対辺はそれぞれ等しい。」このことを，対角線ACをひいて証明しなさい。



【証明】△ABCと△CDAにおいて，

仮定

AB∥DCより，錯角は等しいから，　∠BAC＝∠ ㋐ DCA …①

AD∥BCより，㋑ 錯 角は等しいから，∠BCA＝∠ ㋒ DAC …②

共通な辺だから，AC＝CA …③

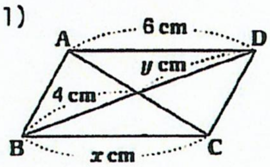
①，②，③より，㋓ 1組の辺とその両端の角 がそれぞれ等しいから，△ABC≡△ ㋔ CDA

よって，AB＝CD，BC＝DA ← 結論

基本パターン 1

▼ 次の図の▱ABCDで，x，y の値を求めなさい。

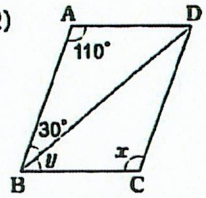
1)

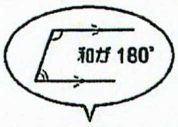


● x＝ ㋐ 6 (cm)　対辺は等しい

● y＝ ㋑ 4 (cm)　対角線は中点で交わる

2)





● ∠ABC＝180°－∠BAD
＝70°

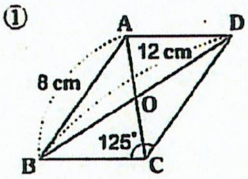
● ∠x＝ ㋒ 110 °　対角は等しい

● ∠y＝70°－30°＝ ㋓ 40 °

トライ 1

次の図の▱ABCDで，線分の長さや角の大きさをそれぞれ求めなさい。

①



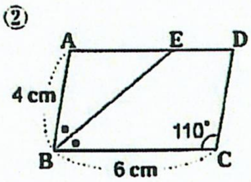
1) 線分CD
8cm

2) 線分OB
6cm

3) ∠BAD
125°

4) ∠ABC
55°

②



1) ∠AEB
35°

2) 線分AE
4cm

答え　基本学習 ㋐ DCA　㋑ 錯　㋒ DAC　㋓ 1組の辺とその両端の角　㋔ CDA　基本1 ㋐ 6　㋑ 4　㋒ 110　㋓ 40

証明は難しくありませんので慣れてしまいましょう。

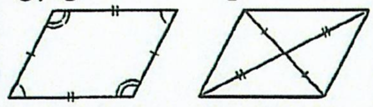
ステップ 2 平行四辺形の性質を利用した証明

大切

確認 平行四辺形の性質

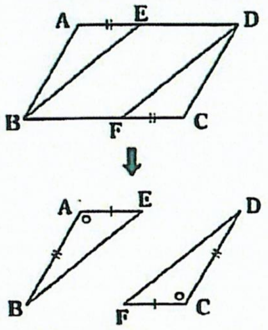
① 2組の対辺はそれぞれ等しい。
② 2組の対角はそれぞれ等しい。
③ 対角線はそれぞれの中点で交わる。

①，②　③



基本パターン 2

▼ 下の図の▱ABCDで，辺AD，BC上に，AE＝CFとなるようにそれぞれ点E，Fをとる。このとき，△ABE≡△CDFであることを証明しなさい。



【証明】

△ABEと△CDFにおいて，

仮定より，AE＝㋐ CF …①

平行四辺形の性質

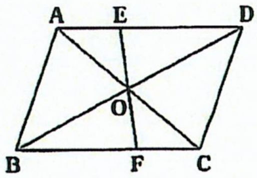
平行四辺形の 対辺は等しい から，　AB＝㋑ CD …②

平行四辺形の 対角は等しい から，∠BAE＝㋒ ∠DCF …③

①，②，③より，㋓ 2組の辺とその間の角 がそれぞれ等しいから，△ABE≡△CDF

トライ 2

右の図の▱ABCDで，対角線の交点をOとし，Oを通る直線と辺AD，BCとの交点をそれぞれE，Fとする。このとき，OE＝OFであることを，図の中に等しい辺や角に同じ印をつけて証明しなさい。



この証明は知っておこう。

【証明】 △OAEと△㋐ OCF において

平行四辺形の対角線はそれぞれの㋑ 中点 で交わるから，OA＝㋒ OC …①

対頂角は等しいから，　∠AOE＝㋓ ∠COF …②

AD∥BCより，㋔ 錯 角は等しいから，　∠OAE＝㋕ ∠OCF …③

①，②，③より，㋖ 1組の辺とその両端の角 がそれぞれ等しいから，△OAE≡△㋗ OCF

よって，　OE＝㋘ OF

平行四辺形になるための条件は全部で5つ。

このうちのどれかにあてはまれば平行四辺形になります。

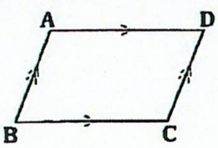
ステップ 3 平行四辺形になるための条件

重要

ポイント 平行四辺形になるための条件

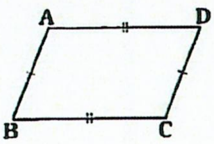
四角形は，次の5つの条件のいずれかが成り立てば平行四辺形である。

① 2組の対辺がそれぞれ平行である。【定義】



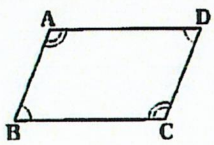
AB∥DC
AD∥BC

② 2組の対辺がそれぞれ等しい。【性質の逆】



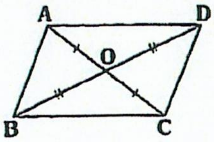
AB＝DC
AD＝BC

③ 2組の対角がそれぞれ等しい。【性質の逆】



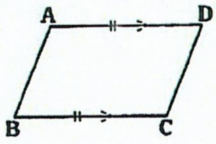
∠A＝∠C
∠B＝∠D

④ 対角線がそれぞれの中点で交わる。【性質の逆】



OA＝OC
OB＝OD

⑤ 1組の対辺が平行でその長さが等しい。



AD∥BC
AD＝BC

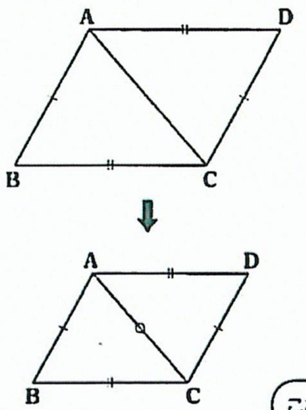
答え

基本2 ㋐CF　㋑CD　㋒DCF
㋓2組の辺とその間の角

答え方はきまっているので、パターンを暗記してしまいましょう。

基本学習 平行四辺形になるための条件❷の証明

▼ 下の図の四角形ABCDで，AB＝CD，BC＝DAならば，AB//DC，AD//BCであることを証明しなさい。



【証明】△ABCと△CDAにおいて，

仮定より，AB＝ ㋐ CD …①，BC＝ ㋑ DA …②

共通な辺だから，AC＝CA …③

①，②，③より，㋒ 3辺 がそれぞれ等しいから，△ABC≡△CDA

よって，∠BAC＝∠ ㋓ DCA だから，AB//DC

∠BCA＝∠ ㋔ DAC だから，AD//BC

平行四辺形の定義

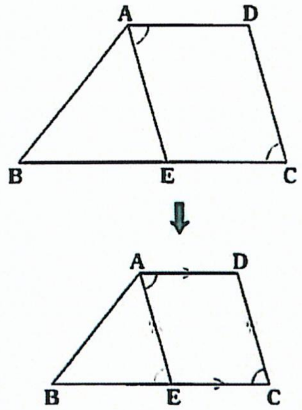
これは，平行四辺形になるための条件❷「2組の対辺がそれぞれ等しい四角形は平行四辺形である。」の証明である。

この2つの証明の方法を知っておこう

定期テストに出やすいです

基本パターン❸

▼ 下の図のように，AD//BCである台形ABCDの辺BC上に，∠DAE＝∠DCBとなるような点Eをとる。このとき，四角形AECDは平行四辺形であることを証明しなさい。



【証明】四角形AECDにおいて，

仮定より，∠DAE＝∠ ㋐ DCE …①，AD//EC …②

②より，錯角は等しいから，∠DAE＝∠ ㋑ AEB …③

①，③より，∠DCE＝∠AEB

よって，㋒ 同位 角が等しいから，AE//DC …④

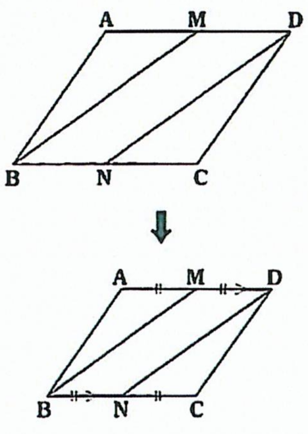
②，④より，2組の対辺がそれぞれ平行であるから，

平行四辺形になるための条件を必ず書くこと

四角形AECDは 平行四辺形 である。

トライ❸

下の図の▱ABCDで，辺AD，BC上の中点をそれぞれM，Nとする。このとき，四角形MBNDは平行四辺形であることを証明しなさい。



【証明】 四角形MBNDにおいて，

平行四辺形の対辺は ㋐ 平行 だから，MD// ㋑ BN …①

平行四辺形の対辺は等しいから，AD＝ ㋒ BC

また，仮定より，MD＝$\frac{1}{2}$AD，BN＝$\frac{1}{2}$ ㋓ BC

よって，MD＝ ㋔ BN …②

①，②より，1組の対辺が ㋕ 平行 で，その ㋖ 長さ が等しいから，

四角形MBNDは平行四辺形である。

答え 基本学習 ㋐CD ㋑DA ㋒3辺 ㋓DCA ㋔DAC 基本3 ㋐DCE ㋑AEB ㋒同位

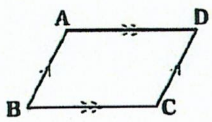
パターンに慣れるまで練習しましょう。

練習問題

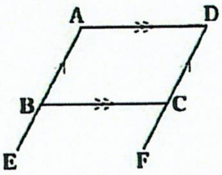
たくさん解いて，解き方を工夫したり，問題に慣れよう！

1 下の図１の▱ABCDで，「平行四辺形の対角はそれぞれ等しい。」という性質を証明する。このとき，次の問いに答えなさい。 ステップ1

【図1】



【図2】



① 仮定と結論を，図１の中の記号を使って，式で表しなさい。 省略

② 図２のように，辺AB，DCの延長上に点E，Fをとり，このことを証明しなさい。

【証明】 AB∥DC，AD∥BCより，

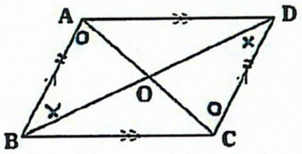
同位角は等しいから，∠BAD＝∠ア EBC

錯角は等しいから，　∠BCD＝∠イ EBC

よって，∠BAD＝∠ウ BCD

同様に，∠ADC＝∠BCF＝∠エ ABC

2 下の図の▱ABCDで，「平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わる。」という性質を証明する。このとき，次の問いに答えなさい。 ステップ1



① 仮定と結論を，図の中の記号を使って，式で表しなさい。 省略

② 上の性質を，右のように証明しなさい。(図の中に，等しい辺や角に同じ印をつけて答えなさい。)

【証明】

△OABと△OCDにおいて，

平行四辺形の対辺は等しいから，AB＝㋐ CD …①

AB∥DCより，㋑ 錯 角は等しいから，

∠OAB＝∠㋒ OCD …②，∠OBA＝∠㋓ ODC …③

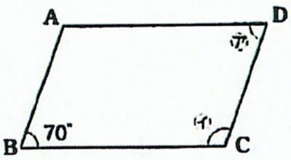
①，②，③より，㋔ 1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから，

△OAB≡△㋕ OCD

よって，OA＝㋖ OC，OB＝㋗ OD

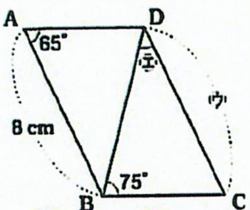
3 次の図の▱ABCDで，㋐～㋗の線分の長さや角の大きさを求めなさい。 基本1

①



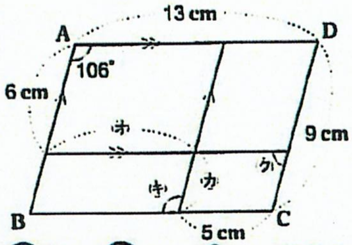
㋐ 70°　㋑ 110°

②



㋒ 8cm　㋓ 40°

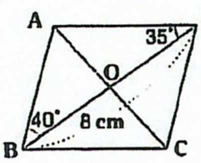
③



㋔ 8cm　㋕ 3cm　㋖ 106°　㋗ 74°

4 次の図の▱ABCDで，線分の長さや角の大きさをそれぞれ求めなさい。 基本1

①

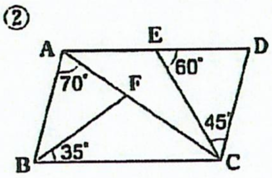


1) 線分OD 4cm

2) ∠DBC 35°

3) ∠BCD 105°

②

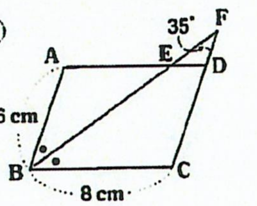


1) ∠ACE 25°

2) ∠ABF 40°

3) ∠BFC 110°

③

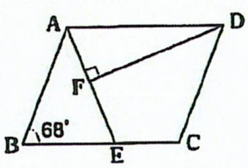


1) ∠AEB 35°

2) ∠ADC 70°

3) 線分ED 2cm

④ AB＝AE，AE⊥DF

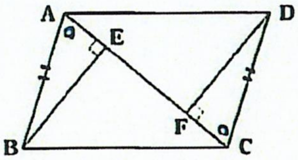


1) ∠BCD 112°

2) ∠CDF 46°

5

下の図のような▱ABCDがある。頂点B，Dから対角線ACへ垂線BE，DFをひいたとき，BE＝DFであることを証明しなさい。(図の中に，等しい辺や角に同じ印をつけて考えなさい。) 基本2



【証明】

△ABEと△ア CDF において，

仮定より，∠AEB＝∠イ CFD ＝ウ 90 °　…①

平行四辺形の対辺は等しいから，AB＝エ CD　…②

AB∥DCより，オ 錯 角は等しいから，∠BAE＝∠カ DCF　…③

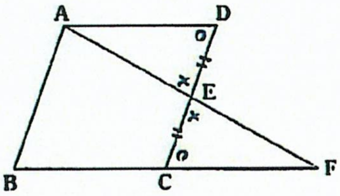
①，②，③より，直角三角形のキ 斜辺と1つの鋭角 がそれぞれ等しいから，

△ABE≡△ク CDF

よって，　BE＝ケ DF

6

右の図の▱ABCDで，辺DCの中点をEとし，AEの延長とBCの延長との交点をFとする。このとき，BC＝CFであることを証明しなさい。(図の中に，等しい辺や角に同じ印をつけて考えなさい。) 基本2



【証明】△ADEと△ア FCE において，

仮定より，DE＝イ CE　…①

ウ 対頂 角は等しいから，∠AED＝∠エ FEC　…②

AD∥CFより，オ 錯 角は等しいから，∠ADE＝∠カ FCE　…③

①，②，③より，キ 1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから，△ADE≡△ク FCE

よって，AD＝ケ FC　…④

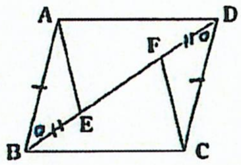
また，平行四辺形の対辺は等しいから，AD＝コ BC　…⑤

④，⑤より，BC＝サ CF

7

右の図の▱ABCDで，対角線BD上に，BE＝DFとなるようにそれぞれ点E，Fをとる。このとき，AE＝CFであることを証明しなさい。 基本2

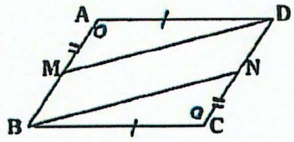
右図参照



8

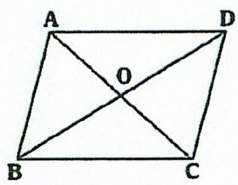
右の図の▱ABCDで，辺AB，CDの中点をそれぞれM，Nとする。このとき，MD＝NBであることを証明しなさい。 基本2

右図参照



9

四角形ABCDにおいて，次の条件の場合，平行四辺形であるといえるものには〔 〕に○を，いえないものには〔 〕に×を書きなさい。 ステップ3

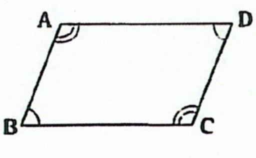


① AB＝DC，AD＝BC〔○〕　② AO＝CO，∠BAD＝∠DCB〔×〕

③ AD∥BC，AD＝BC〔○〕　④ ∠BAD＝∠DCB＝100°，∠ABC＝80°〔○〕

10

下の図の四角形ABCDで，∠A＝∠C，∠B＝∠Dならば，AB∥DC，AD∥BCであることを証明しなさい。(注；これは，「2組の対角がそれぞれ等しい四角形は平行四辺形である。」ことの証明である。) ステップ3



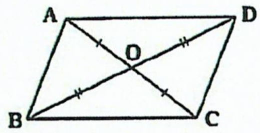
【証明】四角形だから，∠A＋∠B＋∠C＋∠D＝ア 360 °

仮定より，∠A＝∠イ C ，∠B＝∠ウ D

よって，∠A＋∠B＝エ 180 °だから，AD∥BC

同様に，∠A＋∠D＝オ 180 °だから，AB∥DC

11 右の図の四角形ABCDで，OA＝OC，OB＝ODのとき，次の問いに答えなさい。 ステップ3

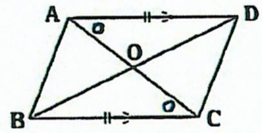


① AB∥DCであることを，右のように証明しなさい。

② ①と同様にして，AD∥BCであることを証明しなさい。（注；これは，「対角線がそれぞれ等しい四角形は平行四辺形である。」ことの証明である。）

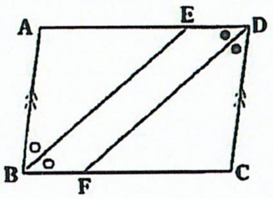
【証明】
△OABと△ア OCD において，
仮定より，OA＝イ OC …①，OB＝ウ OD …②
エ 対頂 角は等しいから，∠AOB＝∠オ COD …③
①，②，③より，カ 2組の辺とその間の角 がそれぞれ等しいから，
△OAB≡△キ OCD
よって，∠OAB＝∠ク OCD
したがって，ケ 錯 角が等しいから，AB∥DC

12 右の図の四角形ABCDで，AD∥BC，AD＝BCならば，AB∥DCであることを，△ABC≡△CDAとなることを利用して証明しなさい。（注；これは，「1組の対辺が平行でその長さが等しい四角形は平行四辺形である。」ことの証明である。） ステップ3



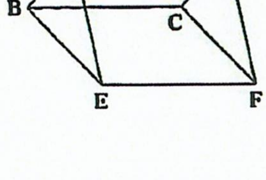
右図参照

13 下の図の▱ABCDで，∠B，∠Dの二等分線が辺AD，BCとそれぞれ点E，Fで交わっている。このとき，四角形EBFDは平行四辺形であることを証明しなさい。 基本3



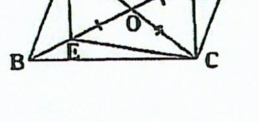
【証明】四角形EBFDにおいて，
仮定より，AD∥BCだから，ED∥ア BF …①
平行四辺形のイ 対角 は等しいから，∠ABC＝∠ウ ADC
また，仮定より，$\angle EBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle ADF=\frac{1}{2}\angle$エ ADC
よって，∠EBC＝∠ADF …②
①より，錯角は等しいから，∠ADF＝∠オ DFC …③
②，③より，∠EBC＝∠DFC
よって，カ 同位 角が等しいから，EB∥キ DF …④
①，④より，2組の対辺がそれぞれク 平行 だから，
四角形EBFDは平行四辺形である。

14 下の図で，2つの四角形ABCD，EBCFはともに平行四辺形である。このとき，四角形AEFDは平行四辺形であることを証明しなさい。 基本3



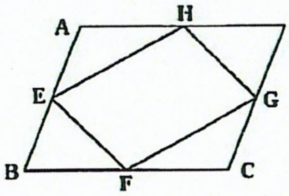
【証明】四角形AEFDにおいて，
平行四辺形の対辺はア 平行 だから，AD∥BC，イ BC ∥EF
よって，AD∥ウ EF …①
平行四辺形の対辺は等しいから，AD＝BC，エ BC ＝EF
よって，AD＝オ EF …②
①，②より，1組の対辺がカ 平行 でキ 長さが等しい から，
四角形AEFDは平行四辺形である。

15 右の図の▱ABCDで，対角線BD上にOE＝OFとなるような2点E，Fをとる。このとき，四角形AECFは平行四辺形であることを証明しなさい。 基本3



右図参照

16 下の図の▱ABCDで，各辺の中点をそれぞれE，F，G，Hとする。このとき，四角形EFGHは平行四辺形であることを証明しなさい。（図の中に，等しい辺や角に同じ印をつけて考えなさい。） ステップ3



【証明】△AEHと△CGFにおいて，

平行四辺形の対辺は等しいから，AB=ア DC

また，仮定より，AE=$\frac{1}{2}$AB，CG=$\frac{1}{2}$イ DC

よって，AE=ウ CG …①

同様にして，AH=CF …②

平行四辺形の対角は等しいから，∠EAH=∠エ GCF …③

①，②，③より，オ 2組の辺とその間の角 がそれぞれ等しいから，

△AEH≡△カ CGF

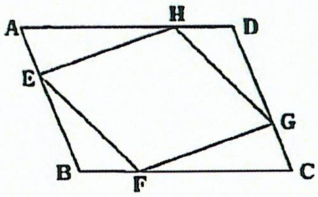
よって，EH=キ GF …④

同様にして，△BFE≡△ク DHG より，EF=ケ GH …⑤

④，⑤より，コ 2組の対辺 がそれぞれ等しいから，

四角形EFGHは平行四辺形である。

17 下の図の▱ABCDで，各辺上に，AE=CG，BF=DHとなるように点E，F，G，Hをとる。このとき，四角形EFGHは平行四辺形であることを証明しなさい。（図の中に，等しい辺や角に同じ印をつけて考えなさい。） ステップ3



【証明】

△AEHと△ア CGF において，

仮定より，AE=イ CG …①

平行四辺形のウ 対辺 は等しいから，AD=エ BC

仮定より，BF=オ DH

また，AH=AD−DH，CF=BC−カ BF

よって，AH=キ CF …②

平行四辺形のク 対角 は等しいから，∠EAH=∠ケ GCF …③

①，②，③より，コ 2組の辺とその間の角 がそれぞれ等しいから，

△AEH≡△サ CGF

よって，EH=シ GF …④

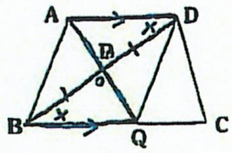
同様にして，△EBF≡△ス GDH より，EF=セ GH …⑤

④，⑤より，ソ 2組の対辺 がそれぞれ等しいから，

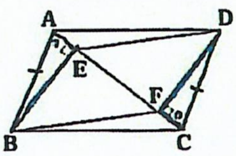
四角形EFGHはタ 平行四辺形 である。

18 右の図のように，AD∥BCの台形ABCDの対角線BD上に，中点Pをとる。APの延長と辺BCとの交点をQとするとき，四角形ABQDは平行四辺形であることを証明しなさい。 ステップ3

左図参照

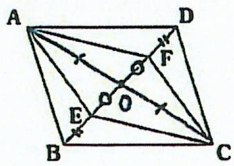


19 下の図の▱ABCDで，頂点B，Dから対角線ACへ垂線BE，DFをそれぞれひく。このとき，四角形EBFDは平行四辺形であることを証明しなさい。 ステップ3



左図参照

20 下の図の▱ABCDで，対角線BD上に，BE=DFとなるように点E，Fをとる。このとき，四角形AECFは平行四辺形であることを証明しなさい。 ステップ3



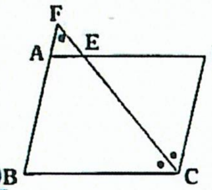
左図参照

上位クラスのみでOK! 少し難しい問題もあるが解いておこう.

応用問題

さあ，チャレンジしてみよう！あきらめずに最後までトライ！

1 右の図の▱ABCDで，∠Cの二等分線と辺ADとの交点をE，辺BAの延長との交点をFとする。AD＝8 cm，CF＝10 cmのとき，△FBCの周の長さを求めなさい。

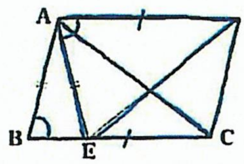


△BCFが二等辺三角形であることに気付く

△FBCの周の長さは

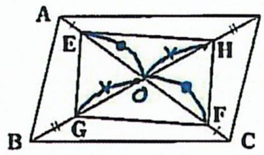
BC＋BF＋CF＝8＋8＋10＝26(cm)

2 右の図の▱ABCDで，辺BC上に，AB＝AEとなるような点Eをとる。このとき，△ABC≡△EADであることを証明しなさい。



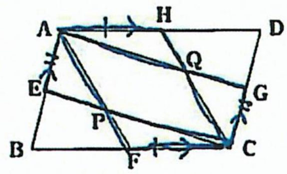
右図参照

3 右の図の▱ABCDで，対角線AC，BD上に，AE＝CF，BG＝DHとなるように点E，F，G，Hをとる。このとき，四角形EGFHは平行四辺形であることを証明しなさい。



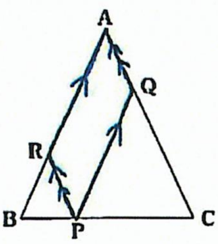
右図参照

やや難 **4** 右の図の▱ABCDで，各辺の中点をそれぞれE，F，G，Hとし，AFとCEの交点をP，AGとCHの交点をQとする。このとき，四角形APCQは平行四辺形であることを証明しなさい。



右図参照

5 右の図のように，AB＝AC＝6 cm，BC＝5 cmの二等辺三角形がある。辺BC上に点Pをとり，Pから辺AB，ACに平行な直線をひき，辺AC，ABとの交点をそれぞれQ，Rとする。このとき，次の問いに答えなさい。



① AR＝QPであることを証明しなさい。

右図参照

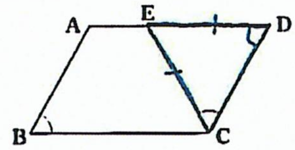
② △RBPはどんな三角形か。

二等辺三角形

③ 四角形ARPQの周の長さを求めなさい。

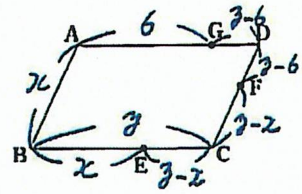
12cm

6 右の図の▱ABCDで，辺AD上に，∠ABC＝∠DCEとなるような点Eをとる。このとき，AE＋EC＝BCであることを証明しなさい。



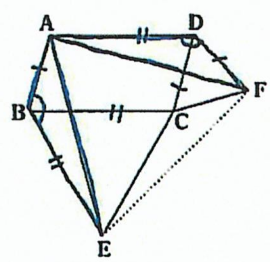
右図参照

やや難 **7** 右の図のように，周囲の長さが26 cmである▱ABCDがある。この▱ABCDの辺BC，CD，DA上に，BA＝BE，CE＝CF，DF＝DGとなるように点E，F，Gをとると，AG＝6 cmであった。このとき，辺AB，ADの長さを求めなさい。



辺AB 5cm，辺BC 8cm

やや難 **8** 右の図のように，▱ABCDの外側に，辺BC，CDを1辺とする正三角形BEC，CFDをかく。このとき，次の問いに答えなさい。



① △ABE≡△FDAであることを証明しなさい。右図参照

② ∠ABE＝$a°$とするとき，∠ECFの大きさをaを使って表しなさい。

$a°$

③ EとFを結ぶとき，△AEFはどんな三角形になるか。

正三角形