この単元で大切なことは「等積変形」の考え方を知っておくこと！

4．特別な平行四辺形・平行線と面積

ステップ 1 長方形・ひし形・正方形

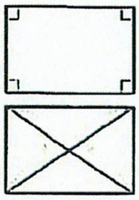
長方形・ひし形・正方形には，次のような性質がある。

ポイント

長方形

【定義】 4つの角が等しい四角形を長方形という。

【定理】 対角線の長さは等しい。



【長方形になるための条件】

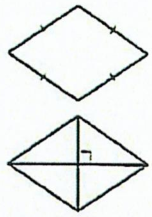
平行四辺形において，
- ① 1つの角が直角である。
- ② 対角線の長さが等しい。

【性質の逆】

ひし形

【定義】 4つの辺が等しい四角形をひし形という。

【定理】 対角線は垂直に交わる。



【ひし形になるための条件】

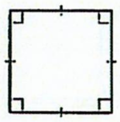
平行四辺形において，
- ① となり合う辺が等しい。
- ② 対角線が垂直に交わる。

【性質の逆】

正方形

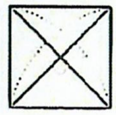
【定義】

4つの角がすべて等しく，4つの辺がすべて等しい四角形を正方形という。



【定理】

対角線の長さは等しく，垂直に交わる。



【正方形になるための条件】 平行四辺形において，長方形，ひし形になるための条件がともに成り立てば正方形である。

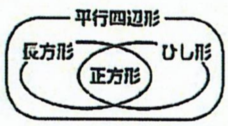
基本学習

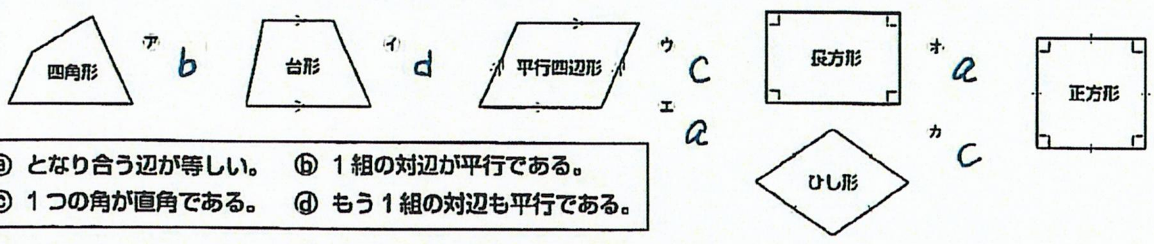
- 長方形は，4つの角がすべて等しい。よって，2組の ㋐ 対角 がそれぞれ等しい ので，平行四辺形である。
- ひし形は，4つの辺がすべて等しい。よって，2組の対辺がそれぞれ等しい ので，㋑ 平行四辺形 である。
- 同様に，正方形も ㋒ 平行四辺形 である。 ➡ 長方形，ひし形，正方形は，平行四辺形の特別な形である。

基本パターン 1 小学5年生のときにしている内容です。

▼ 四角形に，辺や角についての条件を加えて，特別な四角形にかえていくとき，その条件にあてはまるものを ⓐ～ⓓ より選びなさい。（＊同じ記号をくり返し選んでもよい）

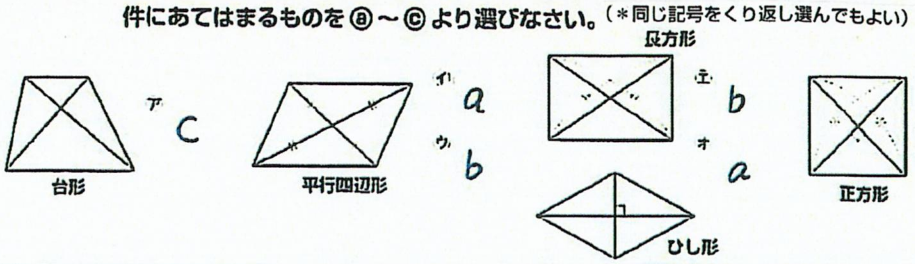
ポイント 正方形は，長方形とひし形の両方の性質を持つ平行四辺形である。





ⓐ となり合う辺が等しい。 ⓑ 1組の対辺が平行である。
ⓒ 1つの角が直角である。 ⓓ もう1組の対辺も平行である。

トライ 1 台形に，対角線についての条件を加えて，特別な四角形にかえていくとき，その条件にあてはまるものを ⓐ～ⓒ より選びなさい。（＊同じ記号をくり返し選んでもよい）



ⓐ 対角線の長さが等しい。 ⓑ 対角線が垂直に交わる。 ⓒ 対角線がそれぞれの中点で交わる。

答え

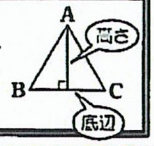
基本学習 ㋐ 対角 ㋑ 平行四辺形 ㋒ 平行四辺形

基本1 ア ⓑ イ ⓓ ウ ⓒ エ ⓐ オ ⓐ カ ⓒ

ステップ 2 平行線と面積

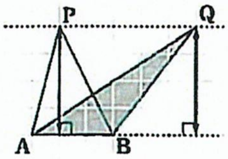
確認 三角形の面積

$\triangle ABC =$ 底辺 × 高さ × $\frac{1}{2}$



基本学習

▼ 次の図で，△PAB，△QAB の面積をそれぞれ求めなさい。



$\triangle PAB = \boxed{3}$（底辺）$\times 4$（高さ）$\times \frac{1}{2} =$ ㋐ 6

$\triangle QAB =$ ㋑ 3（底辺）$\times$ ㋒ 4（高さ）$\times \frac{1}{2} =$ ㋓ 6

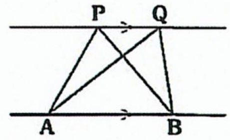
➡ ● $\boxed{底辺}$ と 高さ が同じなら面積は等しい。

● 直線 PQ と辺 AB の関係は，PQ ㋔ // AB である。

参考 △PAB と △QAB の面積が等しいとき，△PAB = △QAB と書く。

大切

ポイント 平行線と面積

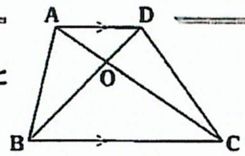


❶ PQ // AB ならば，△PAB = △QAB

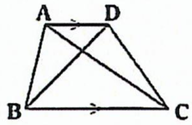
❷ △PAB = △QAB ならば，PQ // AB

基本パターン 2

▼ 右の図で，AD // BC である台形 ABCD の対角線の交点を O とするとき，次の三角形と面積の等しい三角形はどれか。



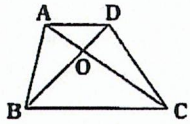
1）△ABC



答え △㋐ DBC

AD // BC より，△ABC と △DBC は高さが等しい

2）△ABO



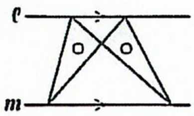
1）より，△ABC = △DBC

また，　△ABO = △ABC − $\boxed{\triangle OBC}$

　　　　△DCO = △DBC − $\boxed{\triangle OBC}$

よって，△ABO = △㋑ DCO である。

ワザあり!! 「台形の目」



上の図の 2 つの三角形で，

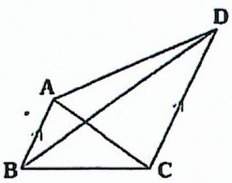
❶ 台形ならば，面積は等しい。

❷ 面積が等しいならば，ℓ // m である。

トライ 2

次の図で，それぞれの三角形と面積の等しい三角形はどれか，すべて答えなさい。

① AB // DC のとき，



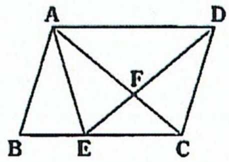
1）△ABC

△ABD

2）△ACD

△BCD

② ▱ABCD



1）△ACD

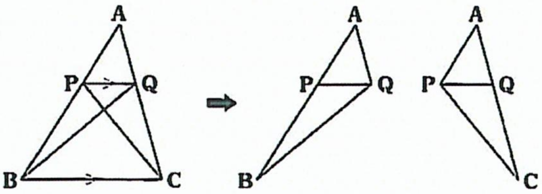
△AED，△ABC

2）△AEF

△DCF

トライ 3

下の図のように，△ABC の辺 BC に平行な直線と辺 AB，AC との交点をそれぞれ P，Q とする。このとき，△ABQ = △ACP であることを証明しなさい。



【証明】

PQ // BC より，底辺と高さが等しいから，

△PBQ = △㋐ QCP

また，　△ABQ = △PBQ + △㋑ APQ

　　　　△ACP = △QCP + △㋒ APQ

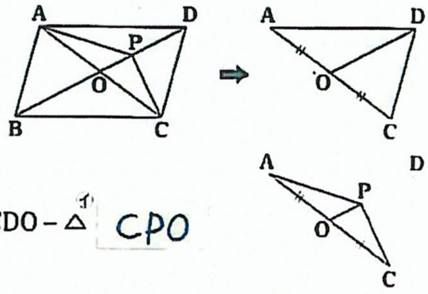
よって，△ABQ = △㋓ ACP

答え

基本学習 ㋐ 6　㋑ 3　㋒ 4　㋓ 6　㋔ //

基本 2 ㋐ DBC　㋑ DCO

トライ④ 右の図の▱ABCDで，対角線BD上に点Pをとる。このとき，△ADP＝△CDPであることを証明しなさい。



【証明】 OA＝OCより，底辺の長さが等しいから，

△ADO＝△CDO，△APO＝△(ア) CPO

また，△ADP＝△ADO－△APO，△CDP＝△CDO－△(イ) CPO

よって，△ADP＝△(ウ) CDP

重要

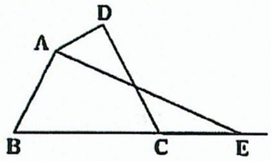
等積変形の考え方は知っておきましょう。

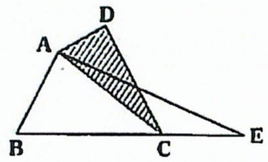
ステップ③ 等積変形（とうせきへんけい）

図形の面積を変えずに，その形を変えることを**等積変形**という。

基本学習

右の図の四角形ABCDで，辺BCを延長した直線上に点Eをとる。△ABEの面積が四角形ABCDの面積と等しくなるようにするには，点Eをどのような位置にとればよいか。





左の図で，△ABE＝四角形ABCDとする。

また，△ABE＝△ABC＋△ACE

四角形ABCD＝△ABC＋△ACDより，

△ACE＝△(ア) ACD でなければならない。

よって，平行線と面積の性質より，AC∥(イ) DE ➡ 点Dを通り，対角線ACに平行な直線をひき，BCの延長との交点をEとする。

基本パターン③

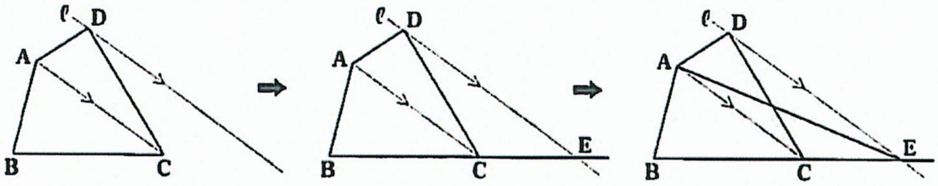
下の図で，四角形ABCDと面積が等しい△ABEを作図しなさい。

ポイント 等積変形の作図

① 頂点Dを通り，対角線ACに平行な直線ℓをひく。

② 直線ℓと辺BCの延長との交点をEとする。

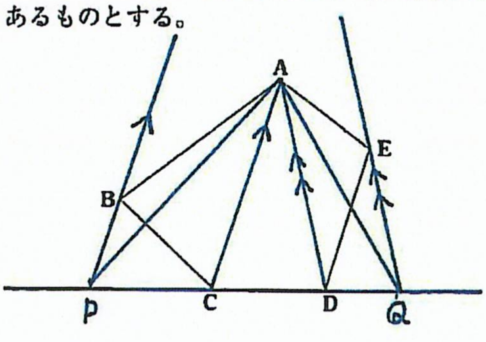
③ AとEを結ぶ。



トライ⑤ 次の問いに答えなさい。

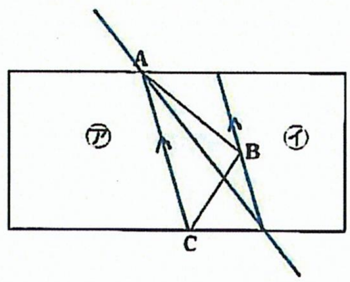
① 下の図で，五角形ABCDEと面積の等しい△APQを作図しなさい。ただし，点P，Qは直線CD上にあるものとする。

よく考えてみよう



② 下の図の長方形で，その面積が折れ線ABCで㋐，㋑の2つの部分に分かれている。㋐，㋑の面積を変えずに，点Aを通る直線で2つに分けるとき，その直線を作図しなさい。

よく考えてみよう



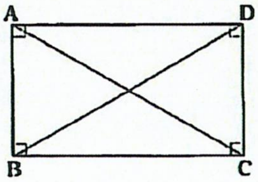
答え 基本学習 ㋐ ACD ㋑ DE

解けない問題がある時は P132 と P133 にもどって復習させよう。

練習問題

たくさん解いて，解き方を工夫したり，問題に慣れよう！

1 「長方形の対角線の長さは等しい。」このことを，下の図の長方形 ABCD で証明しなさい。 ステップ 1



【証明】 △ABC と△DCB において，

長方形の4つの角は等しいから，

∠ABC = ∠ア DCB = イ 90 °…①

平行四辺形の対辺は等しいから，AB = ウ DC …②

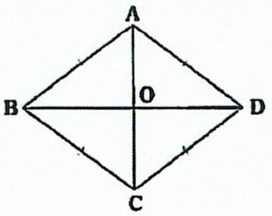
共通な辺だから，BC = エ CB …③

①，②，③より，オ 2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから，

△ABC ≡ △カ DCB

よって，AC = キ DB より，長方形の対角線の長さは等しい。

2 「ひし形の対角線は垂直に交わる。」このことを，下の図のひし形 ABCD で証明しなさい。 ステップ 1



【証明】 △ABO と△ADO において，

ひし形の4つの辺は等しいから，AB = ア AD …①

平行四辺形の対角線はそれぞれのイ 中点 で交わるから，

OB = ウ OD …②

共通な辺だから，AO = エ AO …③

①，②，③より，オ 3 辺 がそれぞれ等しいから，

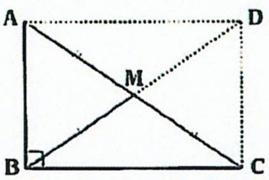
△ABO ≡ △カ ADO

よって，∠AOB = ∠キ AOD

また，∠AOB + ∠AOD = ク 180 °より，∠AOB = ケ 90 °

したがって，ひし形の対角線は垂直に交わる。

3 下の図の直角三角形 ABC で，斜辺 AC の中点を M とすると，MA = MB = MC である。このことを，BM の延長線上に MB = MD となる点 D をとって証明しなさい。 ステップ 1



【証明】

仮定より，MA = ア MC …①，MB = イ MD …②

①，②より，対角線がそれぞれのウ 中点 で交わるから，

四角形 ABCD はエ 平行四辺形 である。

また，仮定より，∠ABC = オ 90 °だから，

1つの角が直角である平行四辺形となる。

よって，四角形 ABCD はカ 長方形 である。

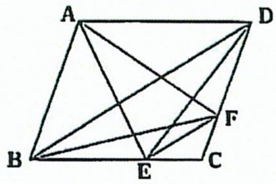
長方形のキ 対角線 の長さは等しいから，AC = ク BD …③

①，②，③より，MA = MB = MC

4 次のいろいろな四角形について，必ずあてはまる性質に○を書きなさい。 基本1

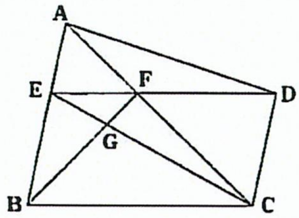
	線対称である	2組の対辺が等しい	4つの辺が等しい	2組の対角が等しい	4つの角が等しい	対角線 中点で交わる	対角線 等しい	対角線 垂直に交わる
平行四辺形		○		○		○		
長方形	○	○		○	○	○	○	
ひし形	○	○	○	○		○		○
正方形	○	○	○	○	○	○	○	○

5 右の図の▱ABCDで，辺BC，CD上にBD∥EFとなるように点E，Fをそれぞれとる。このとき，△ABEと面積の等しくなる三角形をすべて答えなさい。 基本2



△DBE，△DBF，△DAF

6 右の図の四角形ABCDで，AB∥DC，ED∥BCである。このとき，次の三角形と面積の等しい三角形をすべて答えなさい。 ステップ2

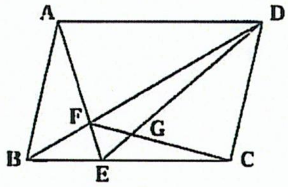


① △EBC
△FBC
△ECD
△ACD

② △EBF
△ECF
△ADF

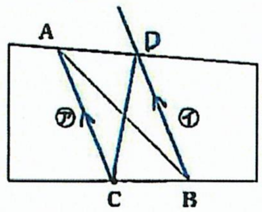
③ △ABF
△AEC
△AED

7 右の図の▱ABCDで，辺BC上に点Eをとり，AEとBDの交点をF，FCとEDの交点をGとする。このとき，△DFEと面積が等しい三角形を2つ答えなさい。 ステップ2



△ABF，△FBC

8 右の図のように，ABを境界とする㋐，㋑の土地がある。この2つの土地の面積を変えずに，図の点Cを通る境界線CDを作図しなさい。 基本3

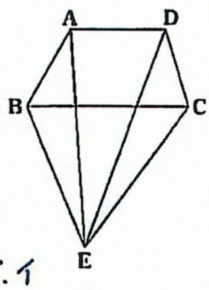


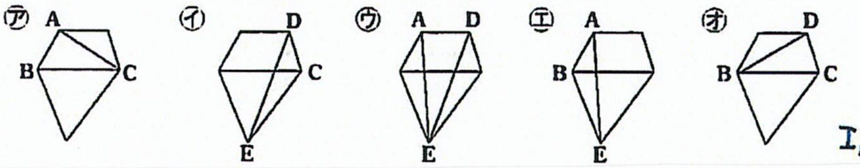
※上位クラスのみでOK!

応用問題

さあ，チャレンジしてみよう！あきらめずに最後までトライ！

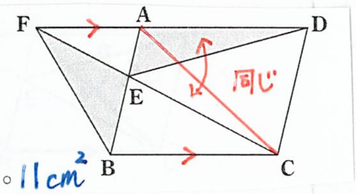
1 右の図のように，AD∥BCの台形ABCDがあり，BE∥DC，AB∥CEとなる点をEとする。次の5つの図のうち，4つを用いて△ABE＝△DECが成り立つことを示すとき，どのように並べるのが最も適当か。記号を順に並べて示しなさい。





エ，ア，オ，イ

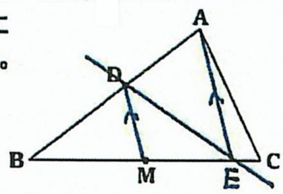
2 右の図は，▱ABCDの辺AB上に点Eをとり，CEの延長とDAの延長との交点をFとしたものである。このとき，次の問いに答えなさい。



① △FBE＝△ADEであることを証明しなさい。 省略

② ▱ABCD＝40cm^2，△FBE＝9cm^{2}であるとき，△BECの面積を求めなさい。 11cm^2

3 右の図の△ABCで，Dは辺AB上の点，Mは辺BCの中点である。辺BC上に点Eをとり，2点D，Eを通る直線が△ABCの面積を2等分するようにしたい。直線DEを作図しなさい。



4 右の図の灰色部分は，大きい正方形から小さい正方形を取りのぞいた部分を表している。正方形の対角線の交点を通る直線は，正方形の面積を2等分することを利用して，灰色部分の面積を2等分する直線ℓを作図しなさい。