

この単元で大切なことは「等積変形」の考え方を知っておくこと！

4. 特別な平行四辺形・平行線と面積

ステップ ① 長方形・ひし形・正方形

長方形・ひし形・正方形には、次のような性質がある。

ポイント

長方形

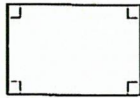
【定義】 4つの角が等しい四角形を長方形という。

【定理】 対角線の長さは等しい。

【長方形になるための条件】

平行四辺形において、
① 1つの角が直角である。
② 対角線の長さが等しい。

【性質の逆】



ひし形

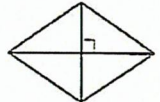
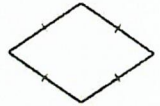
【定義】 4つの辺が等しい四角形をひし形という。

【定理】 対角線は垂直に交わる。

【ひし形になるための条件】

平行四辺形において、
① となり合う辺が等しい。
② 対角線が垂直に交わる。

【性質の逆】

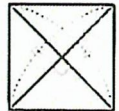
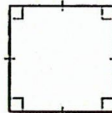


正方形

【定義】 4つの角がすべて等しく、4つの辺がすべて等しい四角形を正方形という。

【定理】

対角線の長さは等しく、垂直に交わる。



【正方形になるための条件】 平行四辺形において、長方形、ひし形になるための条件がともに成り立てば正方形である。

基本学習

- 長方形は、4つの角がすべて等しい。よって、2組の^⑦対角^⑦がそれぞれ等しいので、平行四辺形である。
- ひし形は、4つの辺がすべて等しい。よって、2組の対辺がそれぞれ等しいので、^⑦平行四辺形^⑦である。
- 同様に、正方形も^⑦平行四辺形^⑦である。→ 長方形、ひし形、正方形は、平行四辺形の特別な形である。

基本パターン ①

小学5年生のときにしている内容あり。

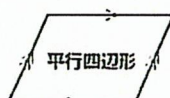
▽ 四角形に、辺や角についての条件を加えて、特別な四角形にかえていくとき、その条件にあてはまるものを①～④より選びなさい。（*同じ記号をくり返し選んでもよい）



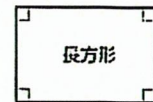
ア b



イ d



ウ c



オ a



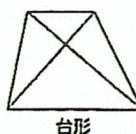
カ c



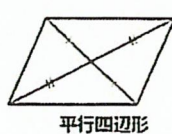
- ① となり合う辺が等しい。 ② 1組の対辺が平行である。
③ 1つの角が直角である。 ④ もう1組の対辺も平行である。

トライ ①

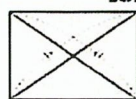
台形に、対角線についての条件を加えて、特別な四角形にかえていくとき、その条件にあてはまるものを①～④より選びなさい。（*同じ記号をくり返し選んでもよい）



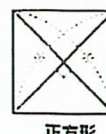
ア c



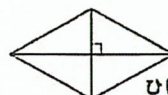
イ a



ウ b



オ a



カ c

答え

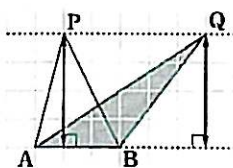
- 基本学習 ア 対角
イ 平行四辺形
ウ 平行四辺形
基本1 ア ① ② ③ ④
ウ ③ ④ ① ②
オ ① ② ③ ④

- ① 対角線の長さが等しい。 ② 対角線が垂直に交わる。 ③ 対角線がそれぞれの中点で交わる。

ステップ 2 平行線と面積

基本学習

▼ 次の図で、 $\triangle PAB$ 、 $\triangle QAB$ の面積をそれぞれ求めなさい。



$$\triangle PAB = \text{底辺} \times \text{高さ} \times \frac{1}{2} = 3 \times 4 \times \frac{1}{2} = 6$$

$$\triangle QAB = \text{底辺} \times \text{高さ} \times \frac{1}{2} = 3 \times 4 \times \frac{1}{2} = 6$$

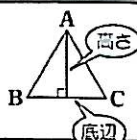
→ 底辺と高さが同じなら面積は等しい。

直線 PQ と辺 AB の関係は、PQ // AB である。

参考 $\triangle PAB$ と $\triangle QAB$ の面積が等しいとき、 $\triangle PAB = \triangle QAB$ と書く。

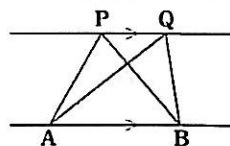
確認 三角形の面積

$$\triangle ABC = \text{底辺} \times \text{高さ} \times \frac{1}{2}$$



ポイント

平行線と面積



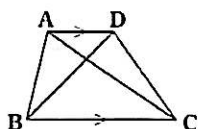
① PQ // AB ならば、 $\triangle PAB = \triangle QAB$

② $\triangle PAB = \triangle QAB$ ならば、PQ // AB

基本パターン 2

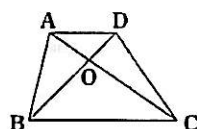
▼ 右の図で、AD // BC である台形 ABCD の対角線の交点を O とするとき、次の三角形と面積の等しい三角形はどれか。

1) $\triangle ABC$



答え $\triangle DBC$

2) $\triangle ABO$



AD // BC より、 $\triangle ABC$ と $\triangle DBC$ は高さが等しい

1) より、 $\triangle ABC = \triangle DBC$

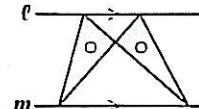
また、 $\triangle ABO = \triangle ABC - \triangle OBC$

$\triangle DCO = \triangle DBC - \triangle OBC$

よって、 $\triangle ABO = \triangle DCO$ である。



「台形の目」



上の図の2つの三角形で、

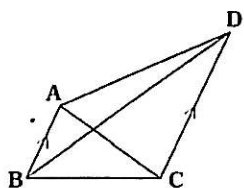
① 台形ならば、面積は等しい。

② 面積が等しいならば、 $l // m$ である。

トライ 2

次の図で、それぞれの三角形と面積の等しい三角形はどれか、すべて答えなさい。

① AB // DC のとき、



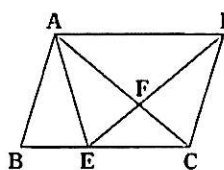
1) $\triangle ABC$

$\triangle ABD$

2) $\triangle ACD$

$\triangle BCD$

② $\square ABCD$



1) $\triangle ACD$

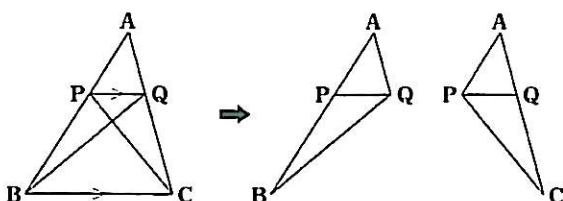
$\triangle AED, \triangle ABC$

2) $\triangle AEF$

$\triangle DCF$

トライ 3

下の図のように、 $\triangle ABC$ の辺 BC に平行な直線と辺 AB、AC との交点をそれぞれ P、Q とする。このとき、 $\triangle ABQ = \triangle ACP$ であることを証明しなさい。



【証明】

PQ // BC より、底辺と高さが等しいから、

$$\triangle PBQ = \triangle QCP$$

また、 $\triangle ABQ = \triangle PBQ + \triangle APQ$

$$\triangle ACP = \triangle QCP + \triangle APQ$$

よって、 $\triangle ABQ = \triangle ACP$

答え

基本学習

ア 6

イ 3

ウ 4

エ 6

オ //

基本2

イ DBC

イ DCO

ドライ④

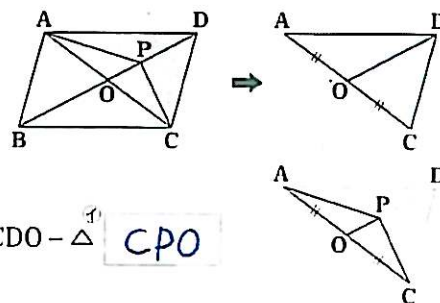
右の図の□ABCDで、対角線BD上に点Pをとる。このとき、 $\triangle ADP = \triangle CDP$ であることを証明しなさい。

【証明】 $OA = OC$ より、底辺の長さが等しいから、

$$\triangle ADO = \triangle CDO, \triangle APO = \triangle CPO$$

$$\text{また、} \triangle ADP = \triangle ADO - \triangle APO, \triangle CDP = \triangle CDO - \triangle CPO$$

$$\text{よって、} \triangle ADP = \triangle CDP$$



重要

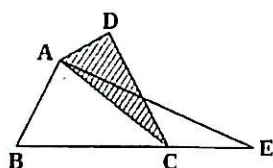
ステップ③

どうせへんけい
等積変形

図形の面積を変えずに、その形を変えることを等積変形という。

基本学習

右の図の四角形ABCDで、辺BCを延長した直線上に点Eをとる。 $\triangle ABE$ の面積が四角形ABCDの面積と等しくなるようにするには、点Eをどのような位置にとればよいか。



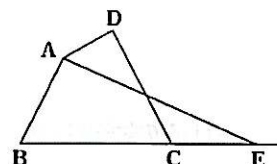
左の図で、 $\triangle ABE = \text{四角形 } ABCD$ とする。

$$\text{また、} \triangle ABE = \triangle ABC + \triangle ACE$$

$$\text{四角形 } ABCD = \triangle ABC + \triangle ACD \text{ より、}$$

$$\triangle ACE = \triangle ACD \text{ でなければならない。}$$

よって、平行線と面積の性質より、 $AC \parallel DE$



点Dを通り、対角線ACに平行な直線をひき、BCの延長との交点をEとする。

基本パターン③

下の図で、四角形ABCDと面積が等しい $\triangle ABE$ を作図しなさい。

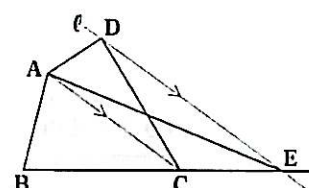
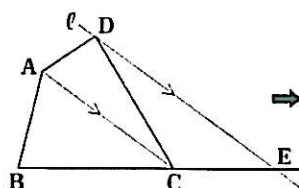
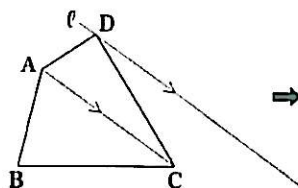
ポイント

等積変形の作図

① 頂点Dを通り、対角線ACに平行な直線ℓをひく。

② 直線ℓと辺BCの延長との交点をEとする。

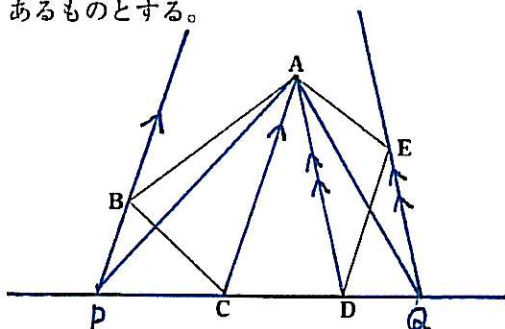
③ AとEを結ぶ。



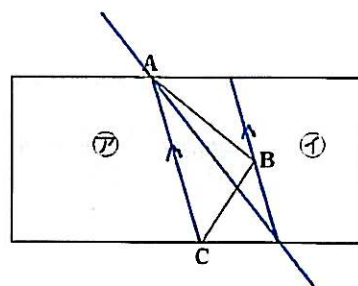
ドライ⑤

次の問いに答えなさい。

① 下の図で、五角形ABCDEと面積の等しい $\triangle APQ$ を作図しなさい。ただし、点P、Qは直線CD上にあるものとする。



② 下の図の長方形で、その面積が折れ線ABCで②、①の2つの部分に分かれている。②、①の面積を変えずに、点Aを通る直線で2つに分けると、その直線を作図しなさい。



答え 基本学習 ② ACD ③ DE

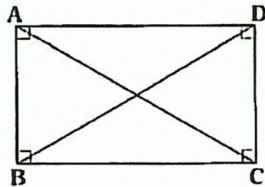
解けない問題がある時は P132 と P133 にむかって復習せよう。

練習問題



たくさん解いて、解き方を工夫したり、問題に慣れよう！

- 1 「長方形の対角線の長さは等しい。」
このことを、下の図の長方形 ABCD
で証明しなさい。 **ステップ 1**



【証明】 $\triangle ABC$ と $\triangle DCB$ において、

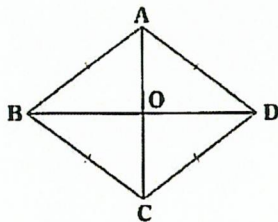
$$\begin{cases} \text{長方形の4つの角は等しいから、} \\ \angle ABC = \angle DCB = 90^\circ \dots (1) \\ \text{平行四辺形の対辺は等しいから、} AB = DC \dots (2) \\ \text{共通な辺だから、} BC = CB \dots (3) \end{cases}$$

(1), (2), (3) より、2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから、

$$\triangle ABC \equiv \triangle DCB$$

よって、 $AC = DB$ より、長方形の対角線の長さは等しい。

- 2 「ひし形の対角線は垂直に交わる。」
このことを、下の図のひし形
ABCD で証明しなさい。 **ステップ 1**



【証明】 $\triangle ABO$ と $\triangle ADO$ において、

$$\begin{cases} \text{ひし形の4つの辺は等しいから、} AB = AD \dots (1) \\ \text{平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わるから、} \\ OB = OD \dots (2) \\ \text{共通な辺だから、} AO = AO \dots (3) \end{cases}$$

(1), (2), (3) より、3 辺 がそれぞれ等しいから、

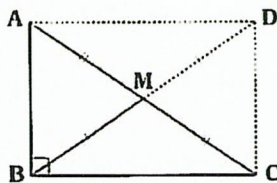
$$\triangle ABO \equiv \triangle ADO$$

よって、 $\angle AOB = \angle AOD$

また、 $\angle AOB + \angle AOD = 180^\circ$ より、 $\angle AOB = 90^\circ$

したがって、ひし形の対角線は垂直に交わる。

- 3 下の図の直角三角形 ABC で、斜辺 AC の
中点を M とすると、 $MA = MB = MC$ で
ある。このことを、BM の延長線上に
 $MB = MD$ となる点 D をとって証明しな
さい。 **ステップ 1**



【証明】

仮定より、 $MA = MC \dots (1)$ 、 $MB = MD \dots (2)$

(1), (2) より、対角線がそれぞれの中点で交わるから、

四角形 ABCD は平行四辺形である。

また、仮定より、 $\angle ABC = 90^\circ$ だから、

1つの角が直角である平行四辺形となる。

よって、四角形 ABCD は長方形である。

長方形の対角線の長さは等しいから、 $AC = BD \dots (3)$

(1), (2), (3) より、 $MA = MB = MC$

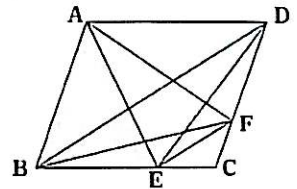
- 4 次のいろいろな四角形について、必ずあてはまる性質に○を書きなさい。 **基本 11**

	線対称で ある	2組の対辺 が等しい	4つの辺が 等しい	2組の対角 が等しい	4つの角が 等しい	対 角 線		
						中点で交わる	等しい	垂直に交わる
平行四辺形		○		○		○		
長方形	○	○		○	○	○	○	
ひし形	○	○	○	○		○		○
正方形	○	○	○	○	○	○	○	○

- 5 右の図の $\square ABCD$ で、辺 BC 、 CD 上に $BD \parallel EF$ となるように点 E 、 F をそれぞれとる。このとき、 $\triangle ABE$ と面積の等しくなる三角形をすべて答えなさい。

基本2

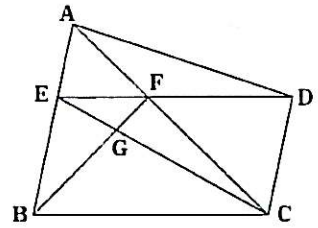
$$\triangle DBE, \triangle DBF, \triangle DAF$$



- 6 右の図の四角形 $ABCD$ で、 $AB \parallel DC$ 、 $ED \parallel BC$ である。このとき、次の三角形と面積の等しい三角形をすべて答えなさい。

ステップ2

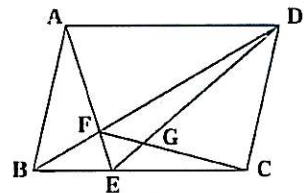
- ① $\triangle EBC$
 $\triangle FBC$
 $\triangle ECD$
 $\triangle ACD$
- ② $\triangle EBF$
 $\triangle ECF$
 $\triangle ADF$
- ③ $\triangle ABF$
 $\triangle AEC$
 $\triangle AED$



- 7 右の図の $\square ABCD$ で、辺 BC 上に点 E をとり、 AE と BD の交点を F 、 FC と ED の交点を G とする。このとき、 $\triangle DFE$ と面積が等しい三角形を2つ答えなさい。

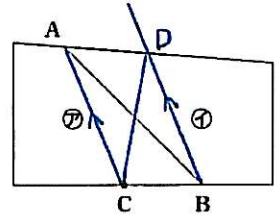
ステップ2

$$\triangle ABF, \triangle FBC$$



- 8 右の図のように、 AB を境界とする⑦、④の土地がある。この2つの土地の面積を変えずに、図の点 C を通る境界線 CD を作図しなさい。

基本3

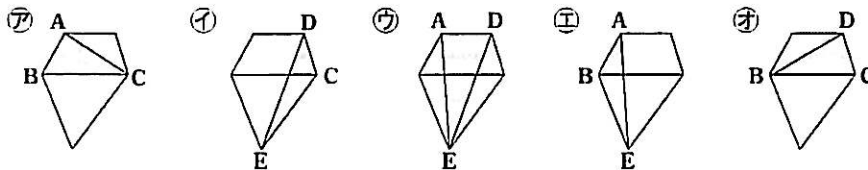


中上位クラスのみOK!

応用問題

さあ、チャレンジしてみよう！あきらめずに最後までトライ！

- 1 右の図のように、 $AD \parallel BC$ の台形 $ABCD$ があり、 $BE \parallel DC$ 、 $AB \parallel CE$ となる点を E とする。次の5つの図のうち、4つを用いて $\triangle ABE = \triangle DEC$ が成り立つことを示すとき、どのように並べるのが最も適当か。記号を順に並べて示しなさい。



I, P, O, I

- 2 右の図は、 $\square ABCD$ の辺 AB 上に点 E をとり、 CE の延長と DA の延長との交点を F としたものである。このとき、 $\triangle FBE = \triangle ADE$ であることを証明しなさい。

線分 AC をひく

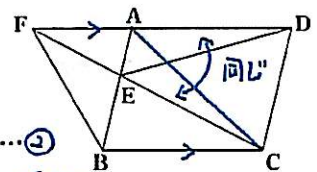
$$\triangle FBE = \triangle FBA - \triangle FEA \quad AB \parallel DC \text{ より}$$

$FD \parallel BC$ より

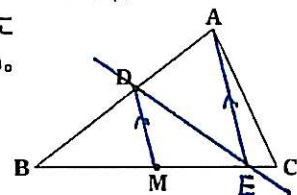
$$\triangle AEC = \triangle FCA - \triangle FEA \quad \triangle AEC = \triangle ADE \dots \textcircled{2}$$

$$\triangle FBA = \triangle FCA$$

$$\text{よって } \triangle FBE = \triangle AEC \dots \textcircled{1} \quad \textcircled{1} \textcircled{2} \text{ より } \triangle FBE = \triangle ADE$$



- 3 右の図の $\triangle ABC$ で、 D は辺 AB 上の点、 M は辺 BC の中点である。辺 BC 上に点 E をとり、2点 D 、 E を通る直線が $\triangle ABC$ の面積を2等分するようにしたい。直線 DE を作図しなさい。



- 4 右の図の灰色部分は、大きい正方形から小さい正方形を取りのぞいた部分を表している。正方形の対角線の交点を通る直線は、正方形の面積を2等分することを利用して、灰色部分の面積を2等分する直線 l を作図しなさい。

