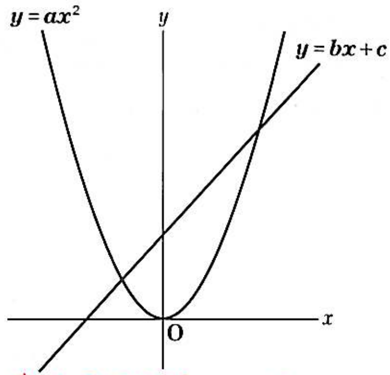
3．放物線と直線



連立方程式を利用する

ステップ 1 放物線と直線の交点

放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=bx+c$ の交点の x 座標を求めるには，2つの式を$\boxed{\text{連立方程式}}$として解けばよい。

ポイント 交点の x 座標は代入法で解こう！

$$\begin{cases} y=ax^2 \\ y=bx+c \end{cases} \Rightarrow ax^2=bx+c$$

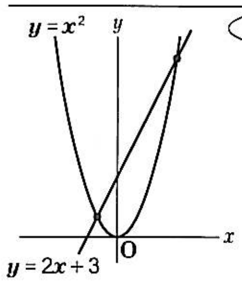
y 座標が等しいので，代入法！

大切

基本パターン 1

▼ 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2x+3$ の交点の座標を求めなさい。

ポイント グラフの問題は「代入」で解こう！



2つのグラフの y 座標は等しいので

$x^2=2x+3$

$x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$

$x=-1,\ 3$

$x=-1$ のとき，$y=(-1)^2=$ ㋐ 1

$y=x^2$ に $x=-1,\ 3$ を代入

$x=3$ のとき，$y=3^2=$ ㋑ 9

答え $(-1,$ ㋒ $1)$，$(3,$ ㋓ $9)$

トライ 1

次の放物線と直線の交点の座標を求めなさい。

① 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x+2$

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=x+2 \end{cases}$$

連立方程式

$x^2=x+2$

$x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$

$x=2,\ -1$

二次方程式

$x=2$ のとき $y=4$

$x=-1$ のとき $y=1$

よって

$(2,4)(-1,1)$

② 放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ と直線 $y=2x$

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 \\ y=2x \end{cases}$$

連立方程式

$\frac{1}{2}x^2=2x$

$x^2=4x$

$x^2-4x=0$

$x(x-4)=0$

二次方程式

$x=0,\ 4$

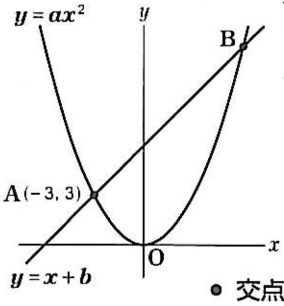
$x=0$ のとき $y=0$

$x=4$ のとき，$y=8$

よって

$(0,0)(4,8)$

発展パターン 1



▼ 放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=x+b$ が2点A，Bで交わっている。点Aの座標が $(-3,\ 3)$ であるとき，点Bの座標を求めなさい。

$A(-3,\ 3)$ は，放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=x+b$ 上の共通な点なので

- $3=a\times(-3)^2$

  $y=ax^2$ に $(-3,\ 3)$ を代入

  $a=\dfrac{1}{3} \Rightarrow y=\dfrac{1}{3}x^2$

- $3=-3+b$

  $y=x+b$ に $(-3,\ 3)$ を代入

  $b=6 \Rightarrow y=x+6$

- 交点の x 座標は，$\dfrac{1}{3}x^2=x+6$

  $x^2-3x-18=0$

  $(x+3)(x-6)=0$

  $x=-3,\ 6$

点Aの x 座標が -3 なので，点Bの x 座標は ㋐ 6

よって，点Bの y 座標は，$y=\dfrac{1}{3}\times 6^2=$ ㋑ 12

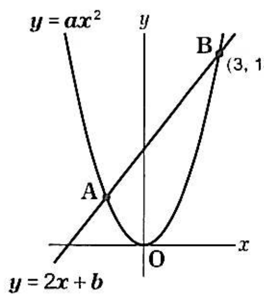
$y=\dfrac{1}{3}x^2$ に $x=6$ を代入

$y=x+6$ に代入してもいい

答え (㋒ 6，㋓ 12)

トライ 2

放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=2x+b$ が2点A，Bで交わっている。点Bの座標が $(3,\ 18)$ であるとき，点Aの座標を求めなさい。



$y=ax^2$ は $B(3,18)$ を通っているので

$18=9a \quad a=2$

$y=2x+b$ も $B(3,18)$ を通っているので

$18=6+b \quad b=12$

点Aは $y=2x^2$ と $y=2x+12$ の交点だから

$2x^2=2x+12$

$x^2=x+6$

$x^2-x-6=0$

$(x-3)(x+2)=0$

$x=3,\ -2$

点Aの x 座標は -2 である。

また，点Aの y 座標は $y=2x^2$ より $y=8$

よって $A(-2,\ 8)$

答え

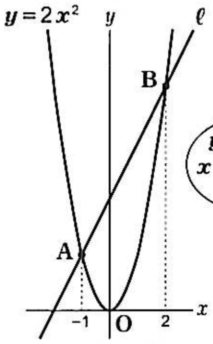
基本1 ㋐ 1 ㋑ 9 ㋒ 1 ㋓ 9

発展1 ㋐ 6 ㋑ 12 ㋒ 6 ㋓ 12

よく出る　基本をしっかりと教えること。

ステップ ② 放物線と直線の式

基本パターン ②



▼ 放物線 $y=2x^2$ と直線 ℓ が2点A，Bで交わり，点A，Bの x 座標は，それぞれ −1，2である。直線 ℓ の式を求めなさい。

- まず点A，Bの座標を求める。

$y=2x^2$ に $x=-1$，2を代入

$x=\boxed{-1}$ のとき，$y=2\times(\boxed{-1})^2=2$ ⇒ A(−1, 2)

$x=\boxed{2}$ のとき，$y=2\times\boxed{2}^2=$ ㋐ $\boxed{8}$ ⇒ B(2, ㋑ $\boxed{8}$)

- 直線 ℓ を $y=ax+b$ として，$ax+b=y$ に点A，Bの座標を代入

連立方程式を解こう
$$\begin{cases}-a+b=2\\2a+b=8\end{cases}\Rightarrow a=2,\ b=4$$

答え $y=$ ㋒ $\boxed{2}$ $x+$ ㋓ $\boxed{4}$

ワザあり! 放物線上の2点を通る直線の式

交点の求め方を逆に利用して，$x=-1$，2を解とする2次方程式は

$(x+1)(x-2)=0$ となる

$x^2-x-2=0$

$x^2=x+2$

$\boxed{2x^2}=2x+4$

⬇

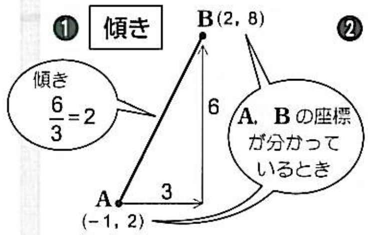
放物線 $\boxed{y=2x^2}$ 上の2点A，Bを通る直線の式は

$y=2x+4$

ポイント 直線の傾きの求め方 (1次関数)

直線において　傾き＝変化の割合

❶ 傾き



❷ 変化の割合

$y=2x^2$ について，x が −1 (A) から 2 (B) まで増加するときの変化の割合

別解 直線 ℓ を $y=ax+b$ として，$ax+b=y$ に変化の割合 (a) とA($\boxed{-1}$ (x)，$\boxed{2}$ (y))を代入！

$y=2x^2$ について

$\boxed{変化の割合}=2\times(-1+2)=2$　p.83参照

x が −1 (A) から 2 (B) まで

$a\ x+b=y$

(−1，2)

⬇

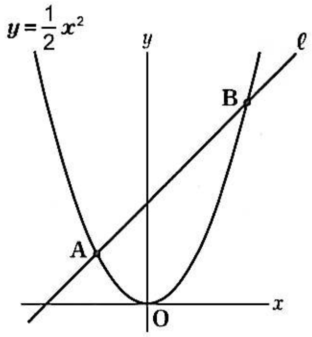
$2\times(-1)+b=2$

$b=4$

答え $y=$ ㋔ $\boxed{2}$ $x+$ ㋕ $\boxed{4}$

トライ ③

放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ と直線 ℓ が2点A，Bで交わり，点A，Bの x 座標は，それぞれ −2，4である。基本パターン❷をもとにして，いろいろな方法で直線 ℓ の式を求めなさい。



基本

点A・Bの座標を求める.

↓

直線ℓを $y=ax+b$ としてもとめる.

基本は全員できるようにする。

発展

2次方程式を利用する.

$(x+2)(x-4)=0$

$x^2-2x-8=0$

$x^2=2x+8$

$\frac{1}{2}x^2=x+4$

よって $y=x+4$

理解できるかどうかがポイント.

答え
基本2 ㋐8 ㋑8 ㋒2 ㋓4 ㋔2 ㋕4

練習問題

たくさん解いて，解き方を工夫したり，計算に慣れよう！

1 次の放物線と直線の交点の座標を求めなさい。 基本1　計算に慣れること。

① 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=-x+2$　(−2, 4) (1, 1)

② 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=3x+4$　(4, 16) (−1, 1)

③ 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=8x-16$　(4, 16)

④ 放物線 $y=-2x^2$ と直線 $y=4x-6$　(−3, −18) (1, −2)

⑤ 放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ と直線 $y=-\frac{1}{2}x+3$　(−3, $\frac{9}{2}$) (2, 2)

⑥ 放物線 $y=\frac{1}{3}x^2$ と直線 $y=2x+9$　(9, 27) (−3, 3)

⑦ 放物線 $y=2x^2$ と直線 $y=4x-2$　(1, 2)

⑧ 放物線 $y=3x^2$ と直線 $y=12$　(2, 12)．(−2, 12)

しっかりと問題を読めば難しくない!

2 次の問いに答えなさい。 発展1

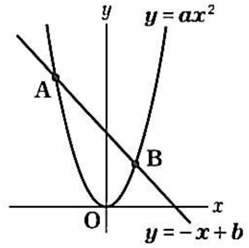
① 放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=-x+b$ が2点A，Bで交わっている。点Bの座標が(2, 4)のとき，次の問いに答えなさい。

1) a，b の値を求めなさい。

$a=1$, $b=6$

2) 点Aの座標を求めなさい。

$(-3, 9)$



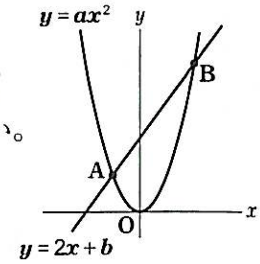
② 放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=2x+b$ が2点A，Bで交わっている。点Aの座標が(−1, 2)のとき，次の問いに答えなさい。

1) a，b の値を求めなさい。

$a=2$, $b=4$

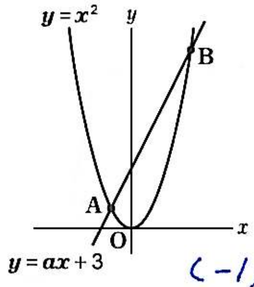
2) 点Bの座標を求めなさい。

$(2, 8)$



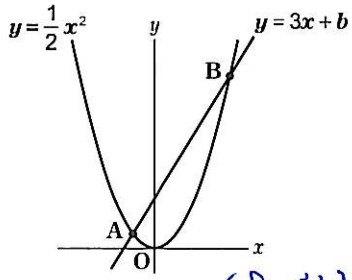
3 次の問いに答えなさい。 発展1

① 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=ax+3$ が2点A，Bで交わっている。点Bの x 座標が3のとき，点Aの座標を求めなさい。



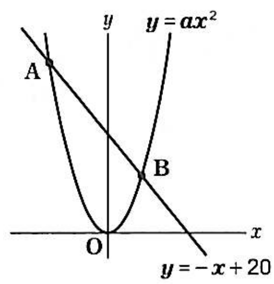
$(-1, 1)$

② 放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ と直線 $y=3x+b$ が2点A，Bで交わっている。点Aの x 座標が−2のとき，点Bの座標を求めなさい。



$(8, 32)$

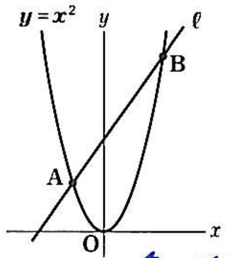
③ 放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=-x+20$ が2点A，Bで交わっている。点Aの x 座標が−5のとき，点Bの座標を求めなさい。



$(4, 16)$

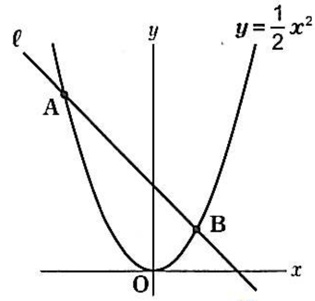
4 次の問いに答えなさい。 基本2

① 放物線 $y=x^2$ と直線 ℓ が2点A，Bで交わっている。点A，Bの x 座標がそれぞれ−2，3であるとき，直線 ℓ の式を求めなさい。



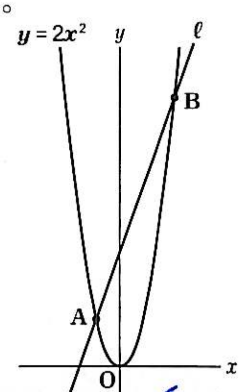
$y=x+6$

② 放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ と直線 ℓ が2点A，Bで交わっている。点A，Bの x 座標がそれぞれ−4，2であるとき，直線 ℓ の式を求めなさい。



$y=-x+4$

③ 放物線 $y=2x^2$ と直線 ℓ が2点A，Bで交わっている。点A，Bの x 座標がそれぞれ−1，4であるとき，直線 ℓ の式を求めなさい。



$y=6x+8$

応用問題

さあ，チャレンジしてみよう！あきらめずに最後までトライ！

1 次の問いに答えなさい。

標準レベル

① 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=ax-4$ が1点で交わっているとき，a の値を求めなさい。 $a=\pm4$

② 放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=-x+b$ が2点A，Bで交わっている。点A，Bの x 座標がそれぞれ−2，4のとき，a，b の値を求めなさい。

$a=-\frac{1}{2}$, $b=-4$